madza media

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

IAIN MADURA

Rany Widyastuti

TEORI BILANGAN

UNTUK PGSD/ PGMI

TEORI BILANGAN

Untuk PGSD/ PGMI

Rany Widyastuti

madza media

TEORI BILANGAN

Untuk PGSD/ PGMI

Edisi Pertama

ISBN 978-623-377-388-1

14,8 x 21 cm
141 h.
cetakan ke-1, 2021

Penulis
Rany Widyastuti

Editor
Dr. H. Nor Hasan, M.Ag.

Penerbit
Madza Media
Anggota IKAPI: No.273/JTI/2021
Kantor: Jl. Bantaran Indah Blok H Dalam 4a Kota
Malangredaksi@madzamedia.co.id
www.madzamedia.co.id

KATA PENGANTAR

Teori bilangan adalah bidang matematika murni yang menganalisis sifat-sifat bilangan bulat dan memiliki banyak masalah terbuka yang mudah dipahami oleh non-ahli matematika. Integer diperiksa dalam teori bilangan dasar tanpa menggunakan alat dari bidang matematika lainnya. Pembagian, teknik Euclidean untuk menghitung faktor persekutuan terbesar, faktorisasi prima, penelitian tentang bilangan sempurna, dan kongruensi adalah semua topik yang dibahas.

Teori bilangan dalam kehidupan sehari-hari sangat penting. Secara tak sadar, seleksi masuk perguruan tinggi menggunakan konsep teori bilangan. Jawaban benar mendapat nilai 4, jawaban salah mendapat nilai -1, dan tidak dijawab mendapat nilai 0. Selain itu dalam bidang IT, teori bilangan juga bermanfaat dalam transfer data secara digital yang menggunakan konsep bilangan 0 dan 1 untuk pemrogramannya. Sehingga dapat dikatakan bahwa teori bilangan merupakan ilmu dasar yang sangat dibutuhkan dalam berbagai ilmu.

Oleh karena itu, Rany Widyastuti berusaha untuk menyajikan teori bilangan dengan menggunakan konteks kehidupan sehari-hari. Hal ini bertujuan untuk memberikan semangat dan gambaran bahwa perkembangan ilmu pengetahuan juga tidak lepas dari perkembangan ilmu dan teknologi. Selain itu, buku ini bisa menjadi sebuah ilustrasi dalam pembelajaran teori bilangan pada peserta didik kelak terutama dengan menggunakan konteks kehidupan sehari-hari.

Pamekasan, Januari 2022

***Reviewer*/Editor**
Dr. H. Nor Hasan, M.Ag.

DAFTAR ISI

BAB I

SISTEM BILANGAN BULAT

A. Pendahuluan

Bilangan merupakan konsep matematika yang digunakan dalam pengukuran dan juga pencacahan. Hampir di setiap materi pada pelajaran Matematika pasti menggunakan bilangan, begitu juga dalam kehidupan sehari-hari. Simbol yang mewakili suatu bilangan dikenal dengan angka atau lambang bilangan. Bilangan terdiri dari berbagai macam, seperti bilangan kompleks, bilangan real, bilangan imaginer, bilangan rasional, bilangan irrasional, bilangan pecahan, bilangan bulat, dan lain-lain. Pada bab ini akan dibahas mengenai bilangan bulat.

Pada bab ini akan membahas tentang pengertian bilangan, macam-macam operasi pada bilangan bulat, dan sifat-sifat yang ada pada operasi bilangan bulat. Bab ini sangat penting untuk dipelajari karena bab ini berhubungan dengan materi berikutnya, yaitu himpunan, relasi, fungsi, persamaan dan pertidaksamaan linear, FPB dan KPK. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

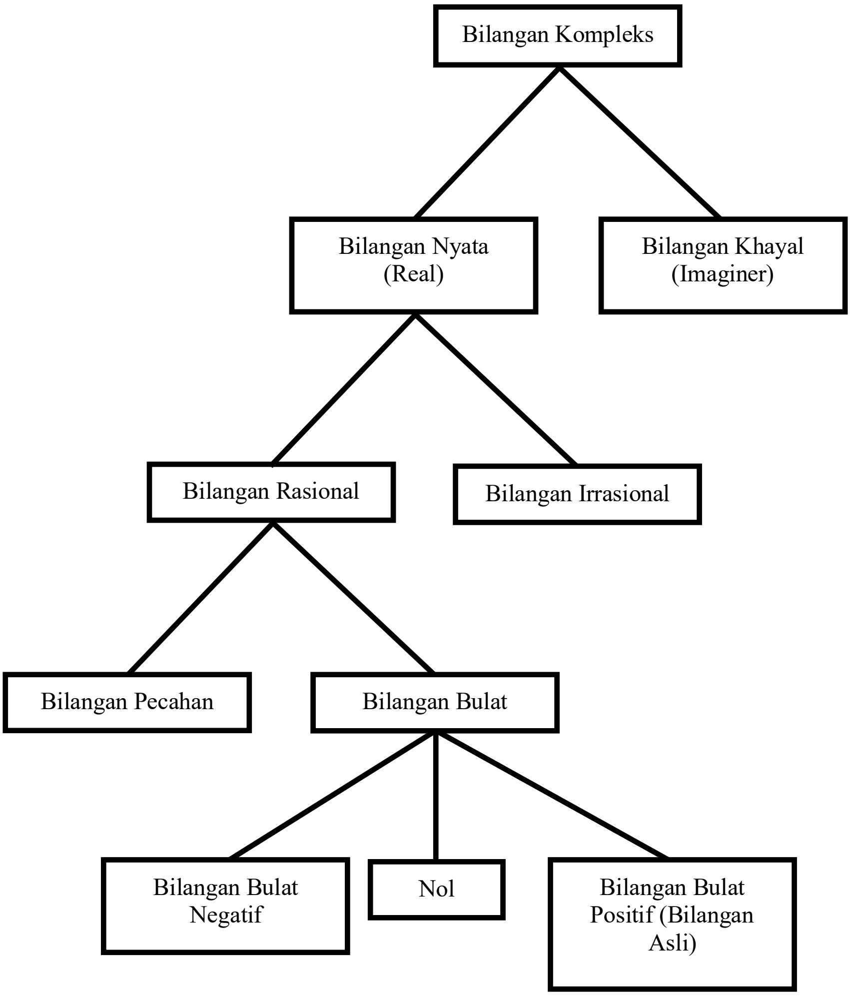
Tujuan pembelajaran pada materi ini adalah agar Anda dapat:

1. Memahami pengertian bilangan
2. Menjelaskan macam-macam operasi hitung pada bilangan bulat
3. Menyelesaikan permasalahan matematika menggunakan operasi hitung pada bilangan bulat
4. Menjelaskan sifat operasi hitung pada bilangan bulat
5. Menyelesaikan permasalahan matematika menggunakan sifat operasi hitung pada bilangan bulat

B. Penyajian Materi

1. Skema Himpunan Bilangan

Sebelum membahas tentang apa itu bilangan bulat, terlebih dahulu Anda harus memahami skema dari himpunan bilangan.



Gambar 1.1

Pada bab ini yang akan dibahas hanya pada himpunan bilangan bulat, di mana himpunan bilangan bulat merupakan bagian dari himpunan bilangan rasional. Bilangan rasional merupakan suatu bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ di mana a dan b merupakan bilangan bulat dan $b \neq 0$.

2. Bilangan

Konsep bilangan dan lambangnya sering sekali ditemui dalam kegiatan untuk berkomunikasi dan bermasyarakat. Pertama kali bilangan hanya diperlukan untuk menghitung sehingga muncul yang disebut sebagai bilangan asli (*natural number*) atau bilangan hitung (*counting number*). Selanjutnya muncul bilangan bulat yang merupakan perluasan dari bilangan cacah. Adanya himpunan bilangan bulat ini dikarenakan ada permasalahan yang tidak bisa diselesaikan dengan bilangan cacah, misalkan pada saat mencari hasil dari 5 – 10. Persoalan tersebut tidak bisa diselesaikan jika himpunan yang digunakan adalah himpunan bilangan cacah, sehingga diperlukan perluasan dari bilangan cacah yang selanjutnya disebut sebagai himpunan bilangan bulat.

Himpunan bilangan asli terdiri atas himpunan bilangan bulat positif, himpunan bilangan 0, dan himpunan bilangan bulat non positif atau disebut juga himpunan bilangan bulat negatif.

Himpunan bilangan bulat positif terdiri dari $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

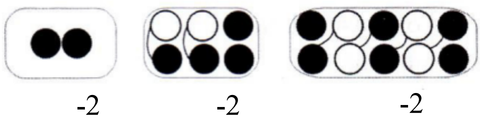
Himpunan bilangan bulat negatif terdiri dari $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

Jadi himpunan bilangan bulat dapat dituliskan $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ dan himpunan bilangan bulat bisa disimbolkan dengan huruf $\mathbb{Z}$ yang berasal dari kata *Zahlen* dari bahasa Jerman.

Hal ini berdasarkan pada hadis nabi Muhammad SAW yang diriwayatkan dari Abu Hurairah Ra. bahwa "*Setiap anak dilahirkan dalam keadaan fitrah, maka kedua orang tuanyalah yang menjadikannya Yahudi, Nashrani, atau Majusi*". (HR. al-Bukhari & Muslim). Berdasarkan hadis tersebut dapat dikatakan bahwa setiap anak itu dilahirkan dimulai dari 0 dan selanjutnya bergantung pada pendidikan yang akan diterimanya apakah anak tersebut akan menjadi positif atau negatif.

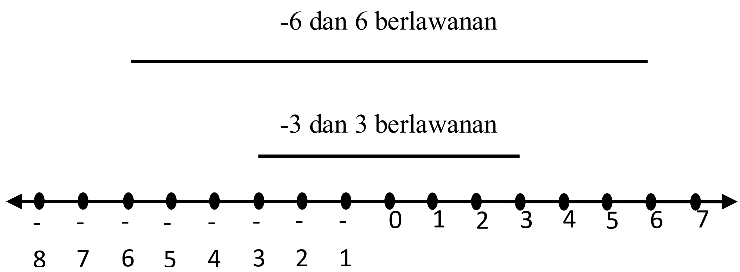
Dalam memahami bilangan bulat ada dua model dasar yang bisa digunakan, yaitu model keping dua warna dan garis bilangan.

1. Model keping dua warna
   Model keping dua warna ini memiliki dua warna yang berbeda, di mana satu warna mewakili bilangan positif dan warna lainnya mewakili bilangan negatif. Jika sepasang keping memiliki warna yang berbeda itu artinya keping tersebut mewakili nilai atau bilangan 0 (netral). Misalkan 1 keping warna hitam mewakili negatif 1 dan 1 keping warna putih mewakili positif 1. Pada saat ingin merepresentasikan bilangan negatif -2 ada beberapa model yang bisa dibuat, yaitu:



Gambar 1.1

2. Garis bilangan
   Garis bilangan digambarkan dalam bentuk garis lurus yang dibuat secara vertikal dan berisi angka-angka yang memiliki jarak yang sama antara bilangannya. Bilangan yang berada di sebelah kanan bilangan 0 disebut sebagai bilangan bulat positif, sedangkan bilangan yang berada di sebelah kiri bilangan 0 disebut sebagai bilangan bulat negatif. Bilangan yang berada di sebelah kanan 0 memiliki lawan atau negatif satu sama lain dengan bilangan yang berada di sebelah kiri 0. Misalkan bilangan 3 yang memiliki lawan -3, bilangan 6 yang memiliki lawan -6, dan seterusnya.



Gambar 1.2

Dalam pembelajaran di SD atau MI cara menggunakan garis bilangan lebih sering dan lebih mudah digunakan dalam pembelajaran matematika dibandingkan model keping dua warna. Hal ini disebabkan karena garis bilangan lebih mudah dipahami dalam penggunaannya.

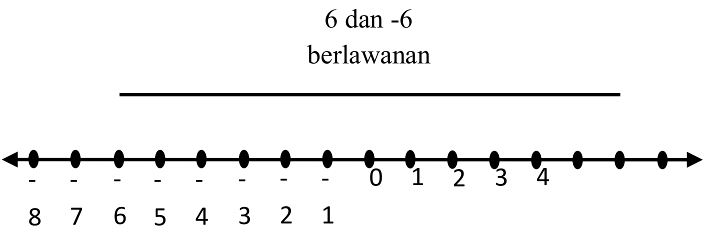
Contoh 1.1

Tentukan lawan dari bilangan bulat berikut.

a. 6
b. -4
c. 0

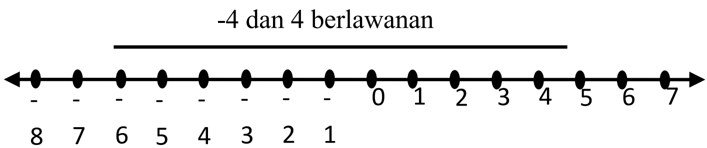
Penyelesaian

a. 6 berlawanan dengan -6



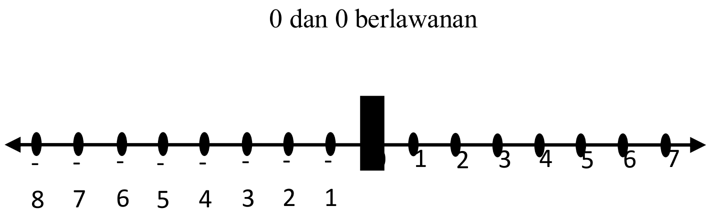
Gambar 1.3

b. -4 berlawanan dengan 4



Gambar 1.4

c. 0 berlawanan dengan 0



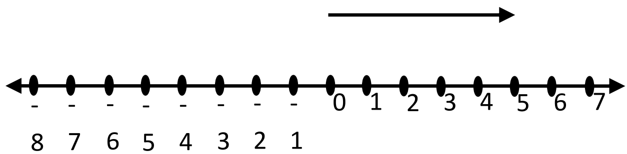
Gambar 1.5

3. Operasi Hitung Bilangan Bulat

a. Operasi Hitung pada Penjumlahan dan Pengurangan

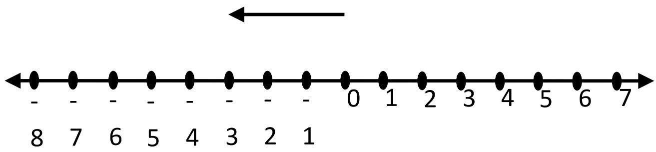
Garis bilangan dapat digunakan untuk peragaan pada operasi hitung bilangan bulat, baik penjumlahan maupun pengurangan. Adapun tata cara penggunaannya sebagai berikut.

1. Langkah pertama posisi awal peragaan harus berada di bilangan 0.
2. Langkah kedua jika ingin menunjukkan bilangan bulat positif maka arahkan ujung arah panah ke arah kanan atau ke arah bilangan positif. Jika ingin menunjukkan bilangan bulat negatif maka arahkan ujung anak panah ke arah kiri atau ke arah bilangan negatif. Misalkan ingin menunjukkan bilangan bulat 5 pada garis bilangan maka posisi awalnya harus dimulai dari bilangan 0. Selanjutnya ujung anak panah akan bergerak ke arah kanan (ke arah bilangan bulat positif) dan akan berhenti di bilangan 5 dengan gambar sebagai berikut.



Gambar 1.6

Contoh untuk menunjukkan bilangan bulat -3 langkah pertama sama seperti contoh bilangan 5 yaitu posisi awal dimulai dari bilangan 0. Selanjutnya ujung anak panah akan bergerak ke arah kiri (ke arah bilangan bulat negatif) dan akan berhenti di bilangan -3 dengan gambar sebagai berikut.



Gambar 1.7

3. Jika ingin melakukan operasi hitung penjumlahan pada bilangan bulat maka arahkan ujung anak panah untuk maju dari bilangan mula-mula ke bilangan yang akan ditambahkan. Jika bilangan yang akan ditambahkan adalah bilangan bulat positif maka ujung anak panah diarahkan bergerak ke arah kanan yaitu bilangan bulat positif. Sedangkan jika bilangan yang akan ditambahkan adalah bilangan bulat negatif maka ujung anak panah diarahkan bergerak ke arah kiri yaitu bilangan bulat negatif. Hasil dari penjumlahan bilangan tersebut akan diperoleh dari posisi akhir ujung anak panah tersebut.
4. Jika ingin melakukan operasi hitung pengurangan pada bilangan bulat maka arahkan ujung anak panah untuk mundur dari bilangan mula-mula ke bilangan yang akan dikurangkan. Jika bilangan yang akan dikurangkan adalah bilangan bulat positif, maka gerakan mundur anak panah harus ke arah bilangan positif. Jika bilangan bulat yang akan dikurangkan adalah bilangan bulat negatif, maka gerakan mundur anak panah harus ke arah bilangan negatif. Hasil dari pengurangan bilangan bulat tersebut dapat dilihat dari posisi akhir ujung anak panah tersebut.

Contoh 1.2

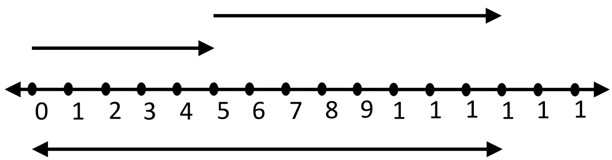
1. Gunakan garis bilangan untuk mengetahui hasil dari penjumlahan berikut!

a. $5 + 8$
b. $9 + (-3)$
c. $(-5) + (-2)$

2. Gunakan garis bilangan untuk mengetahui hasil dari pengurangan berikut!
   a. $13 - 4$
   b. $5 - (-4)$
   c. $(-3) - 5$

Penyelesaian

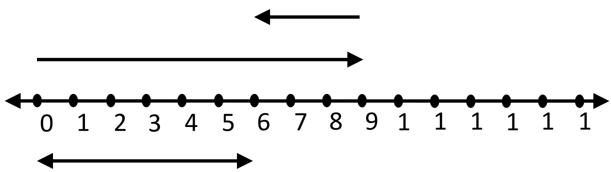
1. a. $5 + 8$



Gambar 1.8

Jadi hasil dari $5 + 8$ adalah 13

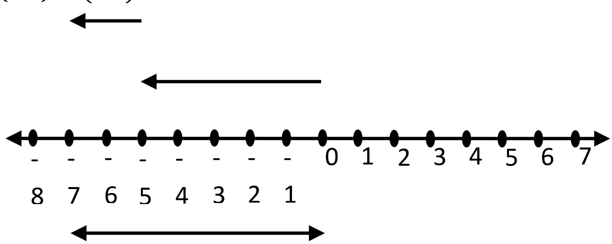
b. $9 + (-3)$



Gambar 1.9

Jadi hasil dari $9 + (-3)$ adalah 6

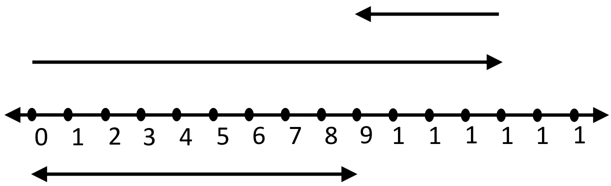
c. $(-5) + (-2)$



Gambar 1.10

Jadi hasil dari $(-5) + (-2)$ adalah -7

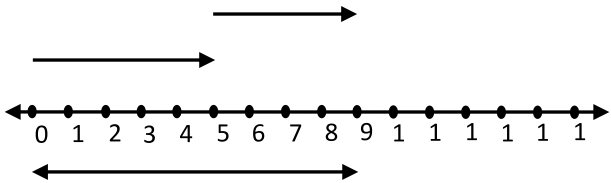
2. a. $13 - 4$



Gambar 1.11

Jadi hasil dari $13 - 4$ adalah 9

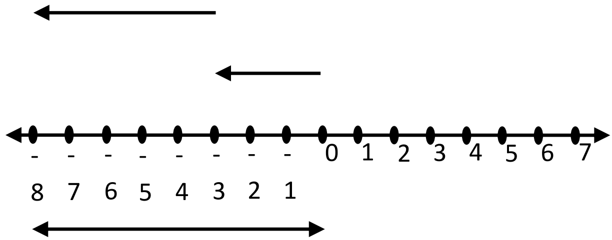
b. $5 - (-4)$



Gambar 1.12

Jadi hasil dari $5 - (-4)$ adalah 9

c. $(-3) - 5$



Gambar 1.13

Jadi hasil dari $(-3) - 5$ adalah (-8)

b. Operasi Hitung pada Perkalian

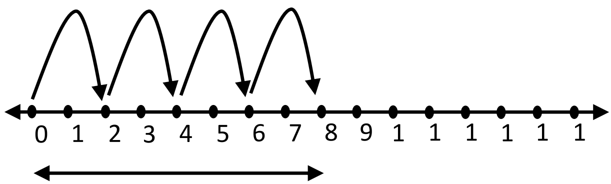
Dalam melakukan perhitungan perkalian pada bilangan bulat, dapat juga dilakukan dengan menggunakan garis bilangan. Untuk tata cara penggunaannya juga sama dengan operasi hitung pada penjumlahan dan pengurangan. Jadi pada saat mau memulai perhitungan perkalian bilangan bulat, posisi awal peragaan harus berada di bilangan 0.

Contoh 1.3

1. Tentukan hasil dari $4\ x\ 2$ menggunakan garis bilangan!
2. Tentukan hasil dari $4\ x\ (-2)$ dengan menggunakan garis bilangan!

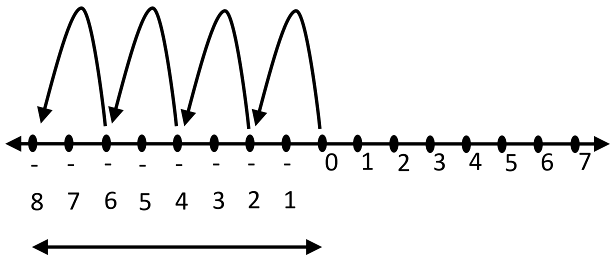
Penyelesaian

1. $4\ x\ 2 = 2 + 2 + 2 + 2 =$



Gambar 1.14

2. $4\ x\ (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$



Gambar 1.15

4. Sifat Operasi Hitung Bilangan Bulat

a. Sifat Operasi Hitung Penjumlahan Bilangan Bulat

i. Sifat Tertutup

Pada saat suatu bilangan bulat akan dijumlahkan dengan bilangan bulat yang lain, maka hasil dari penjumlahan tersebut tentu akan menghasilkan bilangan bulat juga. Misalkan diketahui bilangan bulat 3 dan (-2). Pada saat dilakukan penjumlahan terhadap bilangan bulat tersebut maka hasil yang diperoleh juga bilangan bulat, yaitu $3 + (-2) = 1$.

Dengan demikian maka dapat disimpulkan bahwa operasi penjumlahan memiliki sifat tertutup, yaitu hasil penjumlahan dari dua buah bilangan bulat (baik itu positif atau negatif) maka akan menghasilkan bilangan bulat juga.

ii. **Sifat Komutatif**

Misalkan diketahui dua bilangan bulat a dan b maka akan berlaku:

$$a + b = b + a$$

Berdasarkan definisi tersebut maka dapat dikatakan bahwa penjumlahan dari dua bilangan bulat dapat dipertukarkan dan pernyataan ini yang selanjutnya disebut bahwa penjumlahan dari dua bilangan bulat bersifat komutatif.

Contoh 1.4

Diketahui dua bilangan bulat, yaitu 5 dan (-3). Periksalah apakah $5 + (-3)$ memiliki hasil yang sama dengan $(-3) + 5$!

Penyelesaian:

$5 + (-3) = 2$

$(-3) + 5 = 2$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kedua penjumlahan tersebut memiliki hasil yang sama, yaitu $5 + (-3) = (-3) + 5$

iii. **Sifat Assosiatif**

Misalkan diketahui tiga bilangan bulat a, b, c maka berlaku:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Berdasarkan definisi tersebut dapat dikatakan bahwa penjumlahan tiga bilangan bulat dengan mengelompokkan bilangan bulat kedua dan ketiga dijumlahkan terlebih dahulu kemudian dijumlahkan dengan bilangan pertama maka hasilnya akan sama dengan mengelompokkan bilangan bulat pertama dan kedua dijumlahkan kemudian dijumlahkan dengan bilangan bulat ketiga. Hal inilah yang disebut penjumlahan bilangan bulat berlaku sifat pengelompokan (asosiatif).

Contoh 1.5

Diketahui dua bilangan bulat, yaitu 13, 7, dan (-4). Periksalah apakah $13 + (7 + (-4))$ memiliki hasil yang sama dengan $(13 + 7) + (-4)$!

Penyelesaian:

$13 + \left(7 + (-4)\right) = 13 + 3 = 16$

$(13 + 7) + (-4) = 20 + (-4) = 16$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kedua penjumlahan tersebut memiliki hasil yang sama, yaitu $13 + \left(7 + (-4)\right) = (13 + 7) + (-4)$

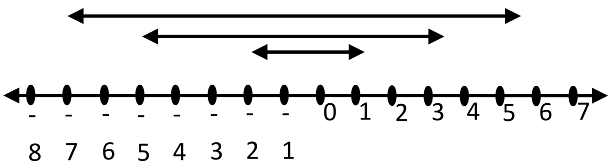
iv. Sifat Identitas

Bilangan "0" merupakan salah satu anggota dari himpunan bilangan bulat. Jika bilangan "0" dijumlahkan dengan sebarang bilangan bulat maka akan menghasilkan bilangan bulat itu sendiri. Misalnya 3 + 0 maka akan menghasilkan 3. Kemudian 0 + 3 maka akan menghasilkan 3 juga. Contoh lainnya misalkan 0 + 0 maka akan menghasilkan 0. Jadi dapat disimpulkan untuk sebarang bilangan bulat a berlaku:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

v. Sifat Invers Penjumlahan

Garis bilangan dapat digunakan untuk mengetahui adanya lawan dari bilangan bulat seperti berikut.



Berdasarkan garis bilangan tersebut terlihat bahwa jarak antara titik yang bertanda negatif dan positif adalah sama terhadap titik 0. Misalkan untuk titik di bilangan bulat -1 dan 1 jaraknya sama terhadap titik 0 nya, yaitu jaraknya 1 titik. Begitu juga dengan bilangan 3 dan 7 yang memiliki jarak yang sama dengan -3 dan -7. Perhatikan bahwa letak titik pada bilangan bulat positif (yaitu 1, 2, 3, 4, …) berseberangan dan berlawanan terhadap titik bertanda 0 pada bilangan bulat negatif (yaitu -1, -2, -3, -4, …). Berikut ini contoh hasil penjumlahan dua bilangan bulat yang saling berlawanan.

1. $1 + (-1) = 0$
2. $(-1) + 1 = 0$
3. $5 + (-5) = 0$
4. $(-5) + 5 = 0$

Berdasarkan contoh tersebut terlihat bahwa penjumlahan dua bilangan bulat yang saling berlawanan akan menghasilkan 0. Jadi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Untuk sebarang bilangan bulat a memiliki invers jumlah $-a$ (atau invers jumlah dari $-a$ adalah a) dan berlaku:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

b. Sifat Operasi Hitung Pengurangan Bilangan Bulat

i. Sifat Tertutup

Pada saat mengambil sebarang dua bilangan bulat dan kedua bilangan bulat tersebut dilakukan operasi pengurangan maka hasil yang diperoleh juga pasti bilangan bulat. Misalnya diketahui dua bilangan bulat, yaitu 9 dan 15. Pada saat dilakukan operasi pengurangan terhadap dua bilangan bulat tersebut maka hasilnya juga bilangan bulat, yaitu:

$$9 - 15 = -6$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa operasi hitung pengurangan terhadap bilangan bulat memiliki sifat tertutup, artinya hasil pengurangan dari dua bilangan bulat (baik positif maupun negatif) akan menghasilkan bilangan bulat juga.

ii. Sifat Komutatif

Pada saat mengambil dua bilangan bulat dan kedua bilangan tersebut dikurangkan, apakah mengurangkan bilangan pertama dengan bilangan kedua akan menghasilkan hasil yang sama pada saat mengurangkan bilangan kedua dengan bilangan pertama? Misalnya ambil sebarang dua bilangan bulat, yaitu 6 dan 9. Apakah $6 - 9$ memiliki hasil yang sama dengan $9 - 6$?

$$6 - 9 = -3$$

$$9 - 6 = 3$$

Terlihat jelas bahwa $6 - 9 \neq 9 - 6$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa pengurangan dua bilangan bulat tidak dapat dipertukarkan atau pengurangan dua bilangan bulat tidak memiliki sifat komutatif.

c. Sifat Operasi Hitung Perkalian Bilangan Bulat

i. Sifat Tertutup

Pada saat suatu bilangan bulat dilakukan operasi perkalian dengan bilangan bulat yang lain, maka pasti akan menghasilkan bilangan bulat juga. Misalkan diketahui bilangan bulat 2 dan 5. Pada saat dilakukan operasi perkalian pada kedua bilangan bulat tersebut maka hasilnya juga bilangan bulat, yaitu $2\ x\ 5 = 10$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa operasi perkalian memiliki sifat tertutup, yaitu hasil perkalian dari dua buah bilangan bulat (baik itu positif atau negatif) maka akan menghasilkan bilangan bulat juga.

ii. Sifat Komutatif

Misalkan diketahui dua bilangan bulat a dan b maka akan berlaku:

$$a\ x\ b = b\ x\ a$$

Berdasarkan definisi tersebut maka dapat dikatakan bahwa perkalian dari dua bilangan bulat dapat dipertukarkan dan pernyataan ini yang selajutnya disebut bahwa perkalian dari dua bilangan bulat bersifat komutatif.

Contoh 1.6

Diketahui dua bilangan bulat, yaitu (-2) dan 6. Periksalah apakah $(-2)\ x\ 6$ memiliki hasil yang sama dengan $6\ x\ (-2)$?

Penyelesaian

$(-2) x\ 6 = -12$

$6\ x\ (-2) = -12$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kedua perkalian tersebut memiliki hasil yang sama, yaitu $(-2) x\ 6 = 6\ x\ (-2)$

iii. Sifat Assosiatif

Misalkan diketahui tiga bilangan bulat a, b, c maka berlaku:

$$a\ x\ (b\ x\ c) = (a\ x\ b) x\ c$$

Berdasarkan definisi tersebut dapat dikatakan bahwa perkalian tiga bilangan bulat dapat dilakukan dengan mengalikan terlebih dahulu bilangan bulat kedua dan ketiga yang hasilnya akan dikalikan dengan bilangan pertama. Hasil dari perkalian tiga bilangan bulat tersebut akan sama hasilnya dengan mengalikan bilangan bulat pertama dan kedua yang hasilnya akan dikalikan dengan bilangan ketiga. Hal inilah yang disebut perkalian bilangan bulat memiliki sifat pengelompokan (assosiatif).

Contoh 1.7

Diketahui tiga bilangan bulat, yaitu (-3), 5 dan 2. Periksalah apakah $(-3) x\,(5\ x\ 2)$ memiliki hasil yang sama dengan $\big((-3) x\ 5\big) x\ 2$?

Penyelesaian

$(-3) x\,(5\ x\ 2) = (-3) x\ 10 = -30$

$\big((-3) x\ 5\big)\ x\ 2 = (-15) x\ 2 = -30$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kedua perkalian tersebut memiliki hasil yang sama, yaitu $(-3) x\,(5\ x\ 2) = \big((-3) x\ 5\big)\ x\ 2$

iv. **Sifat Identitas**

Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa 1 merupakan anggota dari himpunan bilangan bulat. Jika bilangan 1 dikalikan dengan bilangan bulat yang lainnya maka hasilnya adalah bilangan bulat itu sendiri. Misalnya:

1. $1\ x\ 7 = 7$
2. $7\ x\ 1 = 7$
3. $1\ x\ (-3) = -3$
4. $(-3) x\ 1 = -3$
5. $1\ x\ 1 = 1$

Jadi dapat disimpulkan, untuk sebarang bilangan bulat a maka akan berlaku

$$a\ x\ 1 = 1\ x\ a = a$$

di mana *a* disebut sebagai unsur identitas perkalian.

v. **Sifat Distributif**

Misalkan diketahui tiga bilangan bulat a, b, c maka berlaku:

$$a\ x\ (b + c) = (a\ x\ b) + (a\ x\ c)$$

Hal inilah yang disebut sebagai sifat distributif atau penyebaran.

Contoh 1.8

Diketahui tiga bilangan bulat, yaitu 4, 5, (-1). Periksalah apakah $4\ x\ (5 + (-1))$ akan memiliki hasil yang sama dengan $(4\ x\ 5) + (4\ x\ (-1))$?

Penyelesaian

$4\ x\ \left(5 + (-1)\right) = 4\ x\ 4 = 16$

$(4\ x\ 5) + \left(4\ x\ (-1)\right) = 20 + (-4) = 16$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kedua perkalian terhadap penjumlahan tersebut memiliki hasil yang sama, yaitu $4\ x\ \left(5 + (-1)\right) = (4\ x\ 5) + (4\ x\ (-1))$

d. Sifat Operasi Hitung Pembagian Bilangan Bulat

Pembagian merupakan proses mencari suatu bilangan yang belum diketahui "adanya" pada sebuah kalimat matematika. Pembagian merupakan suatu bentuk perkalian di mana salah satu faktornya belum diketahui. Misalnya dalam perkalian $5\ x\ 3 = a$ dan sudah pasti nilai $a = 15$. Bentuk perkalian ini dapat diubah ke dalam bentuk pembagian yaitu:

$15 : 5 = b$ atau $b\ x\ 5 = 15$

Jadi diperoleh nilai $b = 3$.

Selain itu juga bisa dituliskan ke dalam bentuk pembagian yaitu:

$15 : 3 = c$ atau $c\ x\ 3 = 15$

Jadi diperoleh nilai $c = 5$.

C. Rangkuman

1. Himpunan bilangan bulat merupakan himpunan bilangan yang terdiri dari himpunan bilangan bulat positif, bilangan nol, dan himpunan bilangan bulat non positif (atau disebut juga himpunan bilangan bulat negatif, sehingga himpunan bilangan bulat dapat dituliskan $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
2. Beberapa sifat operasi hitung yang ada pada penjumlahan bilangan bulat yaitu sifat tertutup, komutatif, assosiatif, memiliki unsur identitas, dan memiliki invers.
3. Sifat operasi hitung yang ada pada pengurangan bilangan bulat yaitu memiliki sifat tertutup, tetapi tidak memiliki sifat komutatif dan assosiatif.
4. Beberapa sifat operasi hitung yang ada pada perkalian bilangan bulat yaitu sifat tertutup, komutatif, assosiatif, distributif, dan memiliki unsur identitas (yaitu 1).
5. Operasi hitung pembagian pada bilangan bulat tidak berlaku sifat tertutup, tidak berlaku sifat komutatif, dan tidak berlaku sifat assosiatif.

D. Latihan

1. Tentukan hasil dari penjumlahan berikut menggunakan garis bilangan!
    a. $2 + 7$
    b. $8 + (-3)$
    c. $(-8) + 7$
2. Tentukan hasil dari pengurangan berikut menggunakan garis bilangan!
    a. $12 - 6$
    b. $4 - 9$
    c. $(-9) - 3$
    d. $(-1) - (-9)$
3. Jelaskan pendekatan seperti apa yang bisa Anda gunakan untuk menyelesaikan perkalian bilangan bulat berikut!
    a. $4\ x\ 3$
    b. $5\ x\ (-6)$
    c. $(-3)\ x\ 5$
    d. $(-4)\ x\ (-6)$
4. Pada operasi hitung pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, manakah yang memenuhi sifat tertutup, komutatif, dan assosiatif! Berikan alasannya!

E. Daftar Rujukan

Abdussakir. 2017. "Internalisasi Nilai-nilai Islami Dalam Pembelajaran Matematika dengan Strategi Analogi". *Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami (SI MaNIS)*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Nihayati, Ari Suningsih, dan Hafidz Mufti Abdullah. 2019. "Integrasi Ayat-ayat Bilangan Dalam Al-Qur-an Dengan Nilai-Nilai Islam". *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika* 2 (1) : 101 – 109.

Wahyu Engky Irawan, Nurul Hijriyah, dan Azwar Riza Habibi. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki Press.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S. 2004. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Muser, G.L. & Burger, W.F. 1994. *Mathematics for Elementary Teachers; A Contemporary Approach, Third Edition*. New York: MacMillan Publishing Company, Inc.

BAB II
LOGIKA MATEMATIKA

A. Pendahuluan

Berbicara mengenai logika matematika maka erat kaitannya dengan kalimat atau argumen dan juga hubungannya antar kalimat-kalimat tersebut. Dengan adanya aturan-aturan yang ada pada logika maka Anda bisa menilai apakah suatu pernyataan tersebut bernilai benar atau salah. Secara umum kalimat yang digunakan dalam logika matematika berhubungan dengan kehidupan sehari-hari.

Pada bab ini akan membahas tentang pernyataan, negasi, pernyataan majemuk, ekuivalensi logika, negasi dari pernyataan majemuk, tautologi, kontradiksi, konvers, invers, kontraposisi, dan menarik kesimpulan dari suatu pernyataan. Materi ini sangat penting untuk dipelajari karena materi ini berkaitan dengan materi berikutnya, yaitu materi himpunan. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

Tujuan pembelajaran pada materi ini adalah agar Anda dapat:

1. Menjelaskan perbedaan pernyataan dan bukan pernyataan
2. Menjelaskan pengertian negasi
3. Menjelaskan pernyataan majemuk (konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi)
4. Menjelaskan pengertian ekuivalensi logika
5. Membuktikan pernyataan dengan hukum ekuivalensi logika
6. Menjelaskan negasi dari pernyataan majemuk
7. Menjelaskan perbedaan tautologi dan kontradiksi
8. Menjelaskan pengertian konvers, invers, dan kontraposisi
9. Membuat penarikan kesimpulan dari suatu pernyataan

10. Menyelesaikan permasalahan matematika yang berhubungan dengan logika matematika

B. Penyajian Materi

1. Pengertian Pernyataan

Pernyataan atau proposisi merupakan suatu kalimat yang bisa ditentukan nilai kebenarannya, apakah kalimat tersebut bernilai **Benar** saja atau bernilai **Salah** saja, tetapi **tidak keduanya**. Simbol atau penamaan untuk suatu pernyataan menggunakan huruf kecil, misal p, q, r, a, b, t, dan lain-lain.

Contoh 2.1

Perhatikan kalimat-kalimat berikut, kemudian tentukan manakah yang merupakan pernyataan dan bukan pernyataan.

1. Pemandangan itu indah.
2. 3 merupakan bilangan genap.
3. 10 : 5 = 2
4. Andin memiliki tinggi badan yang lebih tinggi daripada Elsa.

Penyelesaian

1. Bukan pernyataan
2. Pernyataan yang bernilai Salah karena 3 bukan merupakan bilangan genap.
3. Pernyataan yang bernilai Benar karena 10 : 5 benar hasilnya adalah 2.
4. Bukan pernyataan karena tidak bisa ditentukan nilai kebenarannya.

Kalimat 1 dan 4 bukan merupakan pernyataan karena tidak bisa ditentukan nilai kebenaran dari kalimat tersebut.

Sedangkan kalimat 2 dan 3 merupakan pernyataan karena dapat ditentukan nilai kebenaran dari kalimat tersebut.

Di dalam ilmu logika matematika, pernyataan terdiri dari dua jenis, yaitu pernyataan terbuka dan tertutup. Pernyataan terbuka adalah suatu pernyataan yang bisa ditentukan nilai kebenarannya, apakah bernilai benar atau salah. Sedangkan pernyataan tertutup adalah suatu pernyataan yang nilai kebenarannya belum bisa ditentukan. Pada pernyataan tertutup biasanya pernyataan tersebut mengandung unsur peubah atau variabel dari suatu persamaan atau pertidaksamaan, sehingga untuk menentukan nilai kebenarannya kita harus membuktikan terlebih dahulu nilai dari peubah atau variabel tersebut.

Contoh 2.2

Pada pernyataan berikut, manakah yang merupakan pernyataan tertutup dan terbuka.

1. 52 – 60 = 8
2. $x^2 - x + 6 = 0$
3. $5 + (3\ x\ 5)$ = 20
4. $2a + 4 \geq 14$

Penyelesaian

1. Pernyataan tertutup yang bernilai salah.
2. Pernyataan terbuka karena masih harus dibuktikan terlebih dahulu nilai kebenarannya.
3. Pernyataan tertutup yang bernilai benar.
4. Pernyataan terbuka karena masih harus dibuktikan terlebih dahulu nilai kebenarannya.

2. Negasi

Negasi atau ingkaran merupakan suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan dari nilai kebenaran pernyataan aslinya. Negasi atau ingkaran disimbolkan dengan "∼". Jika suatu pernyataan memiliki nilai kebenaran Benar, maka negasi dari pernyataan tersebut memiliki nilai kebenaran Salah, begitu pula sebaliknya.

Tabel 2.1

p	$\sim p$
B	S
S	B

Keterangan : B adalah pernyataan yang bernilai Benar
S adalah pernyataan yang bernilai Salah

Misalkan diketahui suatu pernyataan sebagai berikut.
p : 2 + 3 = 5
Negasi dari pernyataan tersebut adalah:

$\sim p : 2 + 3 \neq 5$

Nilai kebenaran dari pernyataan 2 + 3 = 5 bernilai B, maka nilai kebenaran untuk negasi dari pernyataan tersebut adalah S.

Dalam membuat suatu tabel kebenaran, untuk membuat banyaknya baris dalam suatu pernyataan majemuk, dapat digunakan rumus 2^n, di mana n adalah banyaknya variabel.

3. Pernyataan Majemuk

Pernyataan majemuk merupakan kumpulan dari beberapa pernyataan tunggal yang digabungkan dan dihubungkan dengan suatu kata hubung. Pada pernyataan majemuk, diperbolehkan setiap pernyataan tunggalnya tidak saling berhubungan. Dalam ilmu logika matematika, ada 4 jenis pernyataan majemuk, yaitu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

Tabel 2.2

Pernyataan Majemuk	Kata Hubung	Simbol Logika
Konjungsi	… dan …	$\wedge$
Disjungsi	… atau …	$\vee$
Implikasi	Jika … maka …	$\Rightarrow$
Biimplikasi	… jika dan hanya jika …	$\Leftrightarrow$

Contoh 2.3

Diketahui pernyataan berikut.

p = Matematika itu mudah

q = Saya akan lulus mata pelajaran matematika dengan nilai terbaik

Buatlah pernyataan majemuk dari pernyataan-pernyataan tunggal tersebut, baik konjungsi, disjungsi, implikasi, dan juga biimplikasi!

Penyelesaian

- Konjungsi :Matematika itu mudah dan saya akan lulus mata pelajaran matematika dengan nilai terbaik.
- Disjungsi :Matematika itu mudah atau saya akan lulus mata pelajaran matematika dengan nilai terbaik.
- Implikasi :Jika matematika itu mudah maka saya akan lulus mata pelajaran matematika dengan nilai terbaik.

- Biimplikasi :Matematika itu mudah jika dan hanya jika saya akan lulus mata pelajaran matematika dengan nilai terbaik.

Berikut ini penjelasan mengenai ke-4 pernyataan majemuk tersebut.

1. Operasi Konjungsi

Konjungsi merupakan penghubung untuk kata “dan” dengan simbolnya adalah " $\wedge$ ". Konjungsi akan bernilai Benar jika dan hanya jika ke-2 pernyataan (yaitu $p$dan q) bernilai Benar semua, sedangkan untuk kasus yang lainnya maka konjungsi bernilai Salah. Tabel kebenaran untuk konjungsi adalah sebagai berikut.

Tabel 2.3

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Misalkan diketahui dua pernyataan sebagai berikut.
p : 2 adalah bilangan bulat
q : 2 adalah bilangan genap
Konjungsi dari pernyataan tersebut adalah:
$p \wedge q$: 2 adalah bilangan bulat **dan** 2 adalah bilangan genap.
Atau bisa juga
$p \wedge q$: 2 adalah bilangan bulat **dan** bilangan genap

Nilai kebenaran dari pernyataan p (2 adalah bilangan bulat) bernilai B dan pernyataan q (2 adalah bilangan genap) juga bernilai B maka nilai kebenaran untuk konjungsi tersebut adalah B.

2. Operasi Disjungsi

Disjungsi merupakan penghubung untuk kata “atau” dengan simbolnya adalah " $\vee$ ". Disjungsi akan bernilai Salah jika dan hanya jika ke-2 pernyataan (yaitu p dan q) bernilai Salah semua, sedangkan untuk kasus yang lainnya maka disjungsi bernilai Benar. Tabel kebenaran untuk disjungsi adalah sebagai berikut.

Tabel 2.4

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Misalkan diketahui dua pernyataan sebagai berikut.

p : Lambang negara Indonesia adalah Garuda Pancasila

q : (2 x 3) – 2 = 5

Disjungsi dari pernyataan tersebut adalah:

$p \vee q$: Lambang Negara Indonesia adalah Garuda Pancasila **atau** (2 x 3) – 2 = 5

Nilai kebenaran dari pernyataan p (Lambang Negara Indonesia adalah Garuda Pancasila) bernilai B dan pernyataan q ((2 x 3) – 2 = 5) bernilai S maka nilai kebenaran untuk disjungsi tersebut adalah B.

3. Operasi Implikasi

Implikasi merupakan penghubung untuk kata "jika … maka …" dengan simbolnya adalah " $\Rightarrow$ ". Implikasi akan bernilai Salah jika dan hanya jika pernyataan pertama (p) bernilai Benar dan pernyataan kedua (q) bernilai Salah, sedangkan untuk kasus yang lainnya maka implikasi bernilai Benar. Tabel kebenaran untuk implikasi adalah sebagai berikut.

Tabel 2.5

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Misalkan diketahui dua pernyataan sebagai berikut.
p : Bola merupakan salah satu jenis dari bangun datar
q : Segitiga terdiri dari 4 titik sudut
Implikasi dari pernyataan tersebut adalah:
$p \Rightarrow q$: **Jika** bola merupakan salah satu jenis dari bangun datar **maka** segitiga terdiri dari 4 titik sudut.

Nilai kebenaran dari pernyataan p (Bola merupakan salah satu jenis dari bangun datar) bernilai S dan pernyataan q (Segitiga terdiri dari 4 titik sudut) bernilai S maka nilai kebenaran untuk implikasi tersebut adalah B.

4. Operasi Biimplikasi

Biimplikasi merupakan penghubung untuk kata "jika dan hanya jika" dengan simbolnya " $\Leftrightarrow$ ". Biimplikasi akan bernilai Benar jika dan hanya jika ke-2 pernyataan (yaitu $p$dan q) memiliki nilai kebenaran yang sama, sedangkan untuk kasus yang lainnya maka biimplikasi bernilai Salah. Tabel kebenaran untuk biimplikasi adalah sebagai berikut.

Tabel 2.6

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Misalkan diketahui dua pernyataan sebagai berikut.
p : Susilo Bambang Yudhoyono adalah Presiden RI ke 3
q : Lampung adalah kota yang terletak di Pulau Jawa
Biimplikasi dari pernyataan tersebut adalah:
$p \Leftrightarrow q$: Susilo Bambang Yudhoyono adalah Presiden RI ke 3 **jika dan hanya jika** Lampung adalah kota yang terletak di Pulau Jawa.

Nilai kebenaran dari pernyataan p (Susilo Bambang Yudhoyono adalah Presiden RI ke 3) bernilai S dan pernyataan q (Lampung adalah kota yang terletak di Pulau Jawa) bernilai S, maka nilai kebenaran untuk biimplikasi tersebut adalah B.

Contoh 2.4

Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan berikut.

a. $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$
b. $\big(q \vee (p \wedge r)\big) \Rightarrow r$

Penyelesaian:

a. $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Tabel 2.7

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow p$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	S	B
S	S	S	B

b. $(q \vee (p \wedge r)) \Rightarrow r$

Tabel 2.8

p	q	r	$p \wedge r$	$q \vee (p \wedge r)$	$(q \vee (p \wedge r)) \Rightarrow r$
B	B	B	B	B	B
B	B	S	S	B	S
B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	S	B	B
S	B	S	S	B	S
S	S	B	S	S	B
S	S	S	S	S	B

4. Ekuivalensi Logika

Dua pernyataan dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika ke dua pernyataan tersebut memiliki nilai kebenaran yang sama untuk semua substitusi nilai kebenaran dari masing-masing pernyataan atau kalimat penyusunnya. Simbol untuk ekuivalensi adalah " ≡ ". Misalkan terdapat dua pernyataan, misalkan p dan q. Jika p dan q ekuivalen maka dapat dituliskan $p \equiv q$. Jika $p \equiv q$ maka berlaku pula bahwa $q \equiv p$.

Contoh 2.5

Tentukan manakah pernyataan berikut ini yang ekuivalen.

a. $p \Rightarrow q$ dengan $\sim p \vee q$

b. $\sim(p \vee q)$ dengan $\sim p \vee \sim q$
c. $\sim (p \wedge q)$ dengan $\sim p \vee \sim q$

Penyelesaian:

a. $p \Rightarrow q$ dengan $\sim p \vee q$

Tabel 2.9

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

Perhatikan kolom ke 4 (kolom $p \Longrightarrow q$) dan kolom ke 5 (kolom $\sim p \vee q$) pada tabel tersebut. Terlihat bahwa kolom ke-4 dan kolom ke-5 memiliki nilai kebenaran yang sama.Jadi terbukti bahwa $p \Rightarrow q$ ekuivalen dengan $\sim p \vee q$ atau

$$\boxed{\boldsymbol{p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q}}$$

b. $\sim(p \vee q)$ dengan $\sim p \vee \sim q$

Tabel 2.10

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	S	B	B

Perhatikan kolom ke 6 (kolom $\sim(p \vee q)$) dan kolom ke 7 (kolom $\sim p \vee \sim q$) pada tabel tersebut. Terlihat bahwa kolom ke-6 dan kolom ke-7 memiliki nilai kebenaran yang berbeda.Jadi tidak terbukti bahwa$\sim(p \vee q)$ekuivalen dengan $\sim p \vee \sim q$ atau$\sim(p \vee q) \not\equiv \sim p \vee \sim q$

c. $\sim(p \wedge q)$ dengan $\sim p \vee \sim q$

Tabel 2.11

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

Perhatikan kolom ke 6 (kolom $\sim(p \wedge q)$) dan kolom ke 7 (kolom $\sim p \vee \sim q$) pada tabel tersebut. Terlihat bahwa kolom ke-6 dan kolom ke-7 memiliki nilai kebenaran yang sama. Jadi terbukti bahwa $\sim(p \wedge q)$ ekuivalen dengan $\sim p \vee \sim q$ atau $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Selain menggunakan tabel kebenaran, dalam membuktikan apakah kedua pernyataan ekuivalen atau tidak kita bisa menggunakan hukum-hukum ekuivalensi logika. Beberapa hukum ekuivalensi logika disajikan dalam daftar di bawah ini.

1. Hukum Komutatif
   a. Hukum komutatif pada konjungsi : $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
   b. Hukum komutatif pada disjungsi : $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
2. Hukum Asosiatif
   a. Hukum asosiatif pada konjungsi : $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   b. Hukum asosiatif pada disjungsi : $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3. Hukum Distributif
   a. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   b. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Hukum Identitas
   a. $p \wedge B \Leftrightarrow p$
   b. $p \vee S \Leftrightarrow p$
5. Hukum Ikatan
   a. $p \vee B \Leftrightarrow B$
   b. $p \wedge S \Leftrightarrow S$
6. Hukum Negasi

a. $p \vee \sim p \Leftrightarrow B$
b. $p \wedge \sim p \Leftrightarrow S$

7. Hukum Negasi Ganda
   $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
8. Hukum Idempoten
   a. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
   b. $p \vee p \Leftrightarrow p$
9. Hukum De Morgan
   a. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
   b. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
10. Hukum Absorbsi
    a. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
    b. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
11. Negasi B dan S
    a. $\sim B \Leftrightarrow S$
    b. $\sim S \Leftrightarrow B$

Contoh 2.6

Buktikan ekuivalensi dari pernyataan-pernyataan berikut menggunakan hukum ekuivalensi logika.

a. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p$
b. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim q$

Penyelesaian

a. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \sim q)$
Hukum Distribusi

$\Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee q)$	Hukum Komutatif
$\Leftrightarrow p \wedge T$	Hukum Negasi
$\Leftrightarrow p$	Hukum Identitas

Jadi terbukti bahwa $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p$

b. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$
Hukum De Morgan

$\Leftrightarrow (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge p)$	Hukum Komutatif
$\Leftrightarrow \sim q \wedge (\sim p \vee p)$	Hukum Distributif
$\Leftrightarrow \sim q \wedge T$	Hukum Negasi
$\Leftrightarrow \sim q$	Hukum Identitas

Jadi terbukti bahwa $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim q$

Setelah membahas mengenai negasi, pernyataan majemuk, dan ekuivalensi logika maka dapat disimpulkan bahwa negasi dari suatu pernyataan majemuk adalah sebagai berikut.

Tabel 2.12

Pernyataan Majemuk	Simbol	Negasi
Konjungsi	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
Disjungsi	$p \vee q$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Implikasi	$p \Longrightarrow q$	$\sim (p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
Biimplikasi	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

5. Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi adalah suatu kalimat yang selalu bernilai Benar (B) tanpa memandang nilai kebenaran dari masing-masing kalimat penyusunnya. Jika menggunakan tabel kebenaran, suatu tautologi dapat dilihat ketika semua baris di pernyataan akhirnya selalu bernilai Benar.

Kontradiksi adalah suatu kalimat yang selalu bernilai Salah (S) tanpa memandang nilai kebenaran dari masing-masing kalimat penyusunnya. Jika menggunakan tabel kebenaran, suatu kontradiksi dapat dilihat ketika semua baris di pernyataan akhirnya selalu bernilai Salah.

Contoh 2.7

Perhatikan pernyataan berikut.

a. $\big((p \vee (q \wedge p)\big) \vee \sim p\big)$
b. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow q)$

Tentukan apakah pernyataan tersebut bernilai tautologi atau kontradiksi atau bukan keduanya.

Penyelesaian

a. $\big((p \vee (q \wedge p)\big) \vee \sim p\big)$

Tabel 2.13

p	q	$\sim p$	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$	$\left(\left(p \vee (q \wedge p)\right) \vee \sim p\right)$
B	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	S	S	B
S	S	B	S	S	B

Pada tabel tersebut, perhatikan kolom ke-6 (pernyataan yang diinginkan soal).Pada kolom tersebut untuk setiap barisnya bernilai Benar semua, Jadi dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut merupakan tautologi.

b. $(p \vee\sim q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow q)$

Tabel 2.14

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee\sim q)$	$(\sim p \Leftrightarrow q)$	$(p \vee\sim q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	B	B
S	B	B	S	S	B	S
S	S	B	B	B	S	S

Pada tabel tersebut, perhatikan kolom ke-7 (pernyataan yang diinginkan soal).Pada kolom tersebut pada baris ke 2 memiliki nilai Benar, tetapi untuk baris yang lainnya bernilai Salah. Jadi dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut bukan merupakan tautologi dan bukan merupakan kontradiksi.

6. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika diketahui implikasi dari suatu pernyataan adalah $p \Rightarrow q$ maka konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi tersebut adalah sebagai berikut.

Konvers : $q \Rightarrow p$
Invers : $\sim p \Rightarrow \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \Rightarrow \sim p$

Tabel 2.15

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
				$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Pada tabel tersebut, perhatikan kolom untuk implikasi dan kontraposisi. Dari ke-2 kolom tersebut dapat terlihat bahwa implikasi dan kontraposisi memiliki nilai kebenaran yang sama, maka dapat dikatakan bahwa implikasi ekuivalen dengan kontraposisinya, atau bisa dituliskan sebagai berikut $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

Contoh 2.8

Diketahui suatu implikasi "Jika 4 adalah bilangan genap maka 4 dapat habis dibagi 2". Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi tersebut!

Penyelesaian

p : 4 adalah bilangan genap
q : 4 habis dibagi 2
Konvers : Jika 4 habis dibagi 2 maka 4 adalah bilangan genap
Invers : Jika 4 bukan bilangan genap maka 4 tidak habis dibagi 2
Kontraposisi : Jika 4 tidak habis dibagi 2 maka 4 bukan bilangan genap

7. Penarikan Kesimpulan

Argumen merupakan rangkaian dari suatu pernyataan, di mana pernyataan-pernyataan tersebut disebut sebagai Hipotesis/ Premis/ Asumsi, tetapi untuk pernyataan akhir disebut sebagai Kesimpulan/ Konklusi. Secara umum hipotesis dan kesimpulan dapat digambarkan sebagai berikut.

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{Hipotesis}$$

$$\begin{array}{l} p_n \\ \hline \therefore q \longrightarrow \quad \text{Kesimpulan} \end{array}$$

Keterangan :∴ dibaca "jadi"

Misal

Premis 1 (P1) : Jika saya pergi ke toko buku maka saya akan membeli buku cerita

Premis 2 (P2) : Saya pergi ke toko buku

Kesimpulan (K) : Saya akan membeli buku cerita

Dalam menarik sebuah kesimpulan ada 3 cara yang bisa digunakan, yaitu modus ponens, modus tolens, dan silogisme dengan penjelasan sebagai berikut.

1. Modus Ponens

   Modus ponens terdiri dari 2 premis, di mana premis pertama berupa pernyataan majemuk implikasi dan premis kedua berupa pernyataan tunggal. Modus ponens dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Contoh 2.9

Perhatikan premis-premis berikut.

a. P1 : Jika 48 : 4 = 12 maka 12 x 4 = 48

   P2 : 48 : 4 = 12

b. P1 : Jika saya rajin belajar maka saya bisa mengerjakan ujian dengan baik

   P2 : Saya rajin belajar

Berdasarkan premis-premis tersebut, tentukanlah kesimpulan dari soal (a) dan (b) tersebut!

Penyelesaian

a. P1 : Jika 48 : 4 = 12 maka 12 x 4 = 48

   P2 : 48 : 4 = 12

   K : 12 x 4 = 48

b. P1 : Jika saya rajin belajar maka saya bisa mengerjakan ujian dengan baik
   P2 : Saya rajin belajar
   K : Saya bisa mengerjakan ujian dengan baik

2. Modus Tolens
   Modus tolens terdiri dari 2 premis, di mana premis pertama berupa pernyataan majemuk dari implikasi dan premis kedua berupa pernyataan tunggal. Modus tolens dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Contoh 2.10

Perhatikan premis-premis berikut.

a. P1 : Jika 3 adalah bilangan real maka 3 adalah bilangan ganjil
   P2 : 3 bukan bilangan ganjil
b. P1 : Jika hari ini cuaca cerah maka Dhika akan pergi ke toko buku
   P2 : Dhika tidak pergi ke toko buku

Berdasarkan premis-premis tersebut, tentukanlah kesimpulan dari soal (a) dan (b) tersebut!

Penyelesaian

a. P1 : Jika 3 adalah bilangan real maka 3 adalah bilangan ganjil
   P2 : 3 bukan bilangan ganjil
   K : 3 bukan bilangan real

b. P1 : Jika hari ini cuaca cerah maka Aditya akan pergi ke toko buku
   P2 : Aditya tidak pergi ke toko buku
   K : Hari ini cuaca tidak cerah

3. Silogisme

Silogisme terdiri dari 2 premis, di mana kedua premis tersebut merupakan pernyataan majemuk implikasi. Silogisme dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Contoh 2.11

Perhatikan premis-premis berikut.

a. P1 : Jika hari ini saya pulang cepat maka saya ke rumahmu
   P2 : Jika saya ke rumahmu maka saya akan mengajakmu ke toko buku
b. P1 : Jika 10 adalah bilangan genap maka 10 habis dibagi 10
   P2 : Jika 10 habis dibagi 10 maka 10 juga habis dibagi 2

Berdasarkan premis-premis tersebut, tentukanlah kesimpulan dari soal (a) dan (b) tersebut!

Penyelesaian

a. P1 : Jika hari ini saya pulang cepat maka saya ke rumahmu
   P2 : Jika saya ke rumahmu maka saya akan mengajakmu ke toko buku
   ___
   K : Jika hari ini saya pulang cepat maka saya akan mengajakmu ke toko buku

b. P1 : Jika 10 adalah bilangan genap maka 10 habis dibagi 10
   P2 : Jika 10 habis dibagi 10 maka 10 juga habis dibagi 2
   ___
   K : Jika 10 adalah bilangan genap maka 10 juga habis dibagi 2

C. Rangkuman

1. Pernyataan atau proposisi merupakan suatu kalimat yang bisa ditentukan nilai kebenarannya, apakah kalimat tersebut bernilai Benar saja atau bernilai Salah saja, tetapi tidak keduanya.

2. Negasi atau ingkaran merupakan suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan dari nilai kebenaran pernyataan aslinya.
3. Pernyataan majemuk adalah gabungan dari beberapa pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata hubung. Pernyataan majemuk terdiri dari 4, yaitu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.
4. Dua pernyataan dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika ke dua pernyataan tersebut memiliki nilai kebenaran yang sama untuk semua substitusi nilai kebenaran dari masing-masing pernyataan atau kalimat penyusunnya.
5. Tautologi merupakan suatu kalimat yang selalu bernilai Benar (B) tanpa memandang nilai kebenaran dari masing-masing kalimat penyusunnya.
6. Kontradiksi merupakan suatu kalimat yang selalu bernilai Salah (S) tanpa memandang nilai kebenaran dari masing-masing kalimat penyusunnya.
7. Jika diketahui implikasi dari suatu pernyataan adalah $p \Rightarrow q$ maka konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi tersebut adalah:
   Konvers : $q \Rightarrow p$
   Invers : $\sim p \Rightarrow \sim q$
   Kontraposisi: $\sim q \Rightarrow \sim p$
8. Dalam menarik sebuah kesimpulan ada 3 cara yang bisa dilakukan, yaitu modus ponens, modus tolens, dan silogisme.

D. Latihan

1. Tentukan manakah di antara kalimat berikut ini yang merupakan pernyataan
   a. Hari ini cerah
   b. 2 x 10 = 18
   c. Rumah Sinta lebih bagus daripada rumah Riki
   d. $16 = 2^4$

   Buatlah tabel kebenaran untuk soal no. 2 sampai 6
2. $(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$
3. $\big((p \wedge \sim q) \vee p\big) \Leftrightarrow \sim q$
4. $(q \wedge \sim p) \Leftrightarrow \big(\sim p \Rightarrow (p \vee q)\big)$

5. $(p \wedge r) \vee \sim (q \wedge \sim r)$
6. $\sim r \Rightarrow \big(q \wedge \sim (p \vee r)\big)$

   Diketahui nilai kebenaran dari suatu pernyataan adalah sebagai berikut.

   p bernilai B (Benar)

   q bernilai S (Salah)

   r bernilai S (Salah)

   Berdasarkan pernyataan-pernyataan di atas, tentukan nilai kebenaran dari pernyataan soal no. 7 sampai 9 berikut ini.

7. $\sim r \vee (\sim q \Rightarrow r)$
8. $(\sim p \wedge r) \Leftrightarrow \big(r \vee (\sim q \wedge p)\big)$
9. $\sim \big(p \wedge \sim (r \wedge p)\big) \Rightarrow (q \vee \sim q)$

   Tentukan apakah pasangan pernyataan no 10 dan 11 berikut ini ekuivalen (dengan membuat tabel kebenaran dan hukum ekuivalensi logika)

10. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge (\sim p \wedge q))$ dengan $(\sim p \wedge q)$
11. $(r \vee p) \wedge (\big(\sim r \vee (p \wedge q)\big) \wedge (r \vee q))$ dengan $(p \wedge q)$
12. Tentukan apakah pernyataan berikut ini merupakan tautologi atau kontradiksi

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$$

   Tulislah konvers, invers, dan kontraposisi dari kalimat no. 13 dan 14

13. Jika n^2 adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap.
14. Jika n habis dibagi 6, maka n habis dibagi 2 dan n habis dibagi 3.

   Gunakan modus ponens atau modus tollens untuk mengisi titik-titik dalam soal no. 15 dan 16 berikut agar menghasilkan inferensi yang valid.

15. Jika logika adalah pelajaran yang mudah, maka pastilah saya seorang profesor
    Saya bukan seorang profesor
    ∴
    ……………………………………………………………………………
16. Jika poligon ini adalah suatu segitiga, maka jumlah sudut-sudutnya adalah 180^0

Jumlah sudut poligon ini tidak 180^0

$\therefore$ ……………………………………………………………………………

Perhatikan pernyataan 17 – 19 berikut ini. Tentukan manakah pernyataan yang valid dan manakah yang invalid. Jika valid maka jelaskan aturan inferensi apa yang digunakan. Jika tidak valid maka jelaskan kesalahan yang terjadi.

17. Jika Dhika dapat menjawab semua soal ujian dengan benar maka ia akan mendapatkan nilai sempurna.
    Dhika akan mendapatkan nilai sempurna
    $\therefore$ Dhika dapat menjawab semua soal ujian dengan benar
18. Jika Rania pergi belanja maka Rania tidak bisa belajar untuk persiapan ujian esok hari
    Jika Rania tidak bisa belajar untuk persiapan ujian esok hari maka Rania tidak dapat mengerjakan ujian dengan baik
    $\therefore$ Jika Rania pergi belanja maka Rania tidak dapat mengerjakan ujian dengan baik
19. Bilangan real ini merupakan bilangan rasional atau irrasional
    Bilangan real ini tidak rasional
    $\therefore$ Bilangan real ini adalah bilangan irrasional

E. Daftar Rujukan

Hasan Sastra Negara. 2014. *Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Jong Jek Siang. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta : Andi.

Jong Jek Siang. 2015. *Logika Matematika (Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi)*. Yogyakarta : Andi.

Rinaldi Munir. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Sukirman, dkk. 2017. *Buku Materi Pokok Matematika (Edisi 2)*. Jakarta: Universitas Terbuka.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Gatot Muhsetyo. 2019. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara dan Anggun Nugroho. 2019. *Logika dan Matematika*. Yogyakarta: Andi.

BAB III

HIMPUNAN

A. Pendahuluan

Himpunan merupakan materi yang sangat penting untuk dipelajari karena materi ini sering sekali Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Secara tidak langsung, Anda pasti sering mendengar tentang himpunan, misalnya kumpulan film komedi, kelompok bermain, koleksi lagu daerah, himpunan mahasiswa jurusan Matematika IAIN Madura, dan lain-lain. Kata kumpulan, kelompok, koleksi, dan himpunan memiliki makna yang sama yaitu himpunan.

Pada bab ini akan membahas tentang pengertian himpunan, cara menyatakan suatu himpunan, himpunan semesta, himpunan kosong, himpunan bagian, jumlah elemen dari suatu himpunan, operasi himpunan, membuktikan suatu himpunan, serta menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan himpunan. Materi ini sangat berkaitan dengan materi selanjutnya, yaitu relasi dan fungsi. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

Tujuan pembelajaran pada materi ini adalah agar Anda dapat:

1. Menjelaskan pengertian himpunan
2. Menjelaskan cara menyatakan himpunan
3. Mengetahui pengertian himpunan semesta dan himpunan kosong
4. Menentukan himpunan bagian dari suatu himpunan
5. Menentukan jumlah elemen dari suatu himpunan
6. Menjelaskan pengertian himpunan kuasa
7. Menjelaskan macam-macam operasi himpunan
8. Membuktikan suatu himpunan menggunakan hukum himpunan

B. Penyajian Materi

1. Pengertian Himpunan

Himpunan dapat didefinisikan sebagai sekumpulan objek yang berbeda yang dapat didefinisikan secara jelas. Penamaan himpunan biasanya disimbolkan dengan huruf besar, misal A, B, C, dan lain-lain. Sedangkan objek dari suatu himpunan disebut sebagai elemen atau anggota dari suatu himpunan. Elemen atau anggota dari suatu himpunan disimbolkan dengan huruf kecil.

Contoh himpunan

1. Kumpulan warna
2. Kumpulan hewan berkaki empat
3. Kumpulan nama-nama hari
4. Kumpulan mahasiswa berkacamata di IAIN Madura jurusan PAI angkatan 2020

Contoh bukan himpunan

1. Kumpulan wanita pintar
2. Kumpulan pemandangan indah
3. Kumpulan rumah mewah
4. Kumpulan mahasiswa dengan tinggi badan 150 cm

2. Cara Menyatakan Himpunan

Untuk menyatakan anggota dari suatu himpunan, dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu dengan mendaftarkan anggota-anggota himpunannya dan dengan cara menuliskan notasi pembentuk himpunannya.

a. Mendaftarkan Anggota Himpunan

Cara mendaftarkan anggota himpunan yaitu dengan cara menyebutkan anggota-anggota dari himpunan tersebut, antar anggota himpunan dipisahkan dengan tanda koma "," dan menggunakan kurung kurawal. Jika banyaknya anggota dari suatu himpunan dapat disebutkan satu per satu maka kita bisa menuliskan semua anggotanya secara keseluruhan. Tetapi jika anggota dari himpunan tersebut jumlahnya banyak dan antar anggotanya memiliki keteraturan maka anggotanya dapat dituliskan dengan diwakili dengan tiga titik "…".

Contoh 3.1

Perhatikan himpunan-himpunan berikut.

A = Himpunan empat bilangan asli pertama

B = Himpunan bilangan bulat

C = Himpunan huruf vokal

Nyatakan himpunan tersebut dengan mendaftar anggota himpunannya!

Penyelesaian

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$C = \{a, i, u, e, o\}$

b. Menuliskan Notasi Pembentuk Himpunan

Menuliskan notasi pembentuk himpunan yaitu dengan menuliskan sifat-sifat yang ada pada semua anggota himpunan di antara 2 kurung kurawal dan garis vertikal " | " dibaca "di mana".

Contoh 3.2

Perhatikan himpunan-himpunan berikut.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{5, 7, 11, 13, \dots\}$

$C = \{mobil, motor, becak, sepeda, bus\}$

Nyatakan himpunan tersebut dengan menuliskan notasi pembentuk himpunannya!

Penyelesaian

$A = \{x | 1 \leq x \leq 5, x \in bilangan\ bulat\}$

$B = \{x | x > 4, x \in bilangan\ prima\}$

$C = \{x | x \in jenis\ kendaraan\ di\ darat\}$

3. Himpunan Semesta dan Himpunan Kosong

Himpunan semesta adalah suatu himpunan yang memuat semua objek yang dibicarakan. Himpunan semesta disimbolkan dengan S atau U. Misalkan kita berbicara dengan himpunan bilangan asli, maka kita bisa menggunakan himpunan bilangan real sebagai semestanya.

Himpunan kosong merupakan suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota dan disimbolkan dengan ∅ atau { }.

Contoh 3.3

Diketahui himpunan $A = \{x|13 < x < 17, x \in bilangan\, prima\}$. Tuliskan himpunan tersebut dengan cara mendaftarkan anggotanya!

Penyelesaian

$A = \{\ \}$ atau $A = \emptyset$. Hal ini dikarenakan pada himpunan A tersebut tidak ada bilangan prima yang lebih dari 13 dan kurang dari 17.

4. Himpunan Bagian

Jika terdapat dua buah himpunan, misalkan himpunan A dan himpunan B, dapat dikatakan A merupakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota di himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan B. Secara definisi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \big((\forall x) x \in A \Longrightarrow x \in B\big)$$

Contoh 3.4

Perhatikan soal berikut.

1. $A = \{2, 4, 6, 8\}$
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
2. $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
   $B = \{10, 11, 12\}$
3. $A = \{1\}$
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Dari ke-3 soal di atas, manakah yang memenuhi syarat $A \subseteq B$?

Penyelesaian

1. $A \subseteq B$ karena setiap anggota himpunan A merupakan bagian dari anggota himpunan B.
2. $A \nsubseteq B$ karena tidak semua anggota himpunan A merupakan bagian dari anggota himpunan B.
3. $A \subseteq B$ karena setiap anggota himpunan A merupakan bagian dari anggota himpunan B.
4. $A \subseteq B$ karena setiap anggota himpunan A merupakan bagian dari anggota himpunan B. Pada soal ini juga berlaku $B \subseteq A$ karena setiap anggota himpunan B juga merupakan bagian dari anggota himpunan A.

Jadi dapat disimpulkan bahwa $A = B$ karena $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

5. Jumlah Elemen pada Himpunan

Jumlah elemen dari suatu himpunan merupakan banyaknya elemen atau anggota yang ada pada himpunan tersebut dan dinyatakan dengan bilangan kardinal. Misalkan diketahui himpunan A, maka bilangan kardinal dari himpunan A disimbolkan dengan *n* (A).

Contoh 3.5

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 3, 5, 7\}$. Tentukan banyakan elemen pada himpunan A!
2. Diketahui himpunan $B = \emptyset$. Tentukan banyaknya elemen pada himpunan B!

Penyelesaian

1. Himpunan A mempunyai 4 elemen, yaitu 1, 3, 5, dan 7 dan dapat dituliskan sebagai *n* (A) = 4 dan dibaca bilangan kardinal atau kardinalitas dari himpunan A adalah 4 .
2. Himpunan B tidak mempunyai elemen dan dapat dituliskan sebagai *n* (B) = 0 dan dibaca bilangan kardinal atau kardinalitas dari himpunan B adalah 0.

6. **Himpunan Kuasa**

Himpunan kuasa merupakan himpunan yang seluruh anggotanya merupakan kumpulan dari himpunan-himpunan bagian, termasuk di dalamnya himpunan kosong. Misalkan diketahui himpunan A, maka himpunan kuasa dari suatu himpunan A disimbolkan dengan P(A). Banyaknya anggota dari suatu himpunan kuasa bisa dicari dengan rumus 2^n, di mana *n* menyatakan banyaknya anggota dari himpunan A.

Contoh 3.6

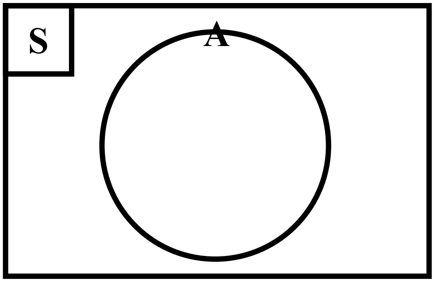
1. Diketahui himpunan $A = \{p, q\}$. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan A!
2. Diketahui himpunan $B = \{3, 5, 7\}$. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan B!

Penyelesaian

1. Banyaknya himpunan kuasa dari himpunan A adalah $2^2 = 4$ dengan rincian sebagai berikut:
   $P(A) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$
2. Banyaknya himpunan kuasa dari himpunan B adalah $2^3 = 8$ dengan rincian sebagai berikut:
   $P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{5, 7\}, \{3, 7\}, \{3, 5, 7\}\}$

7. **Operasi Himpunan**

John Venn merupakan seorang ahli matematika Inggris yang menemukan cara untuk menggambarkan keadaan himpunan-himpunan yang selanjutnya disebut dengan Diagram Venn. Untuk menggambarkan hubungan antara himpunan antara himpunan-himpunan dapat kita gunakan diagram venn. Himpunan digambarkan sebagai daerah lingkaran sedangkan semesta sebagai daerah empat persegi panjang dan digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1

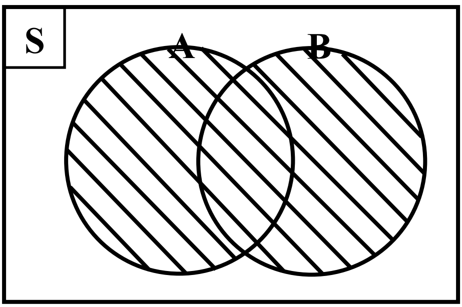
Beberapa operasi yang sering digunakan dalam himpunan dapat dijelaskan sebagai berikut.

a. Gabungan (*Union*)

Gabungan dua buah himpunan, misalkan himpunan A dan himpunan B, adalah himpunan semua anggota A atau anggota B. Himpunan A gabungan himpunan B disimbolkan dengan $A \cup B$ dan secara definisi dapat dituliskan sebagai berikut

$$A \cup B = \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$$

Himpunan A gabungan himpunan B dapat digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut dengan daerah yang diarsir adalah himpunan $A \cup B$.



Gambar 3.2

Contoh 3.7

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$dan $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$. Tentukan $A \cup B$!

2. Diketahui himpunan $C = \{a, b, c, d, e\}$dan $D = \{b, c, e, f, h, i\}$. Tentukan $C \cup D$!

Penyelesaian

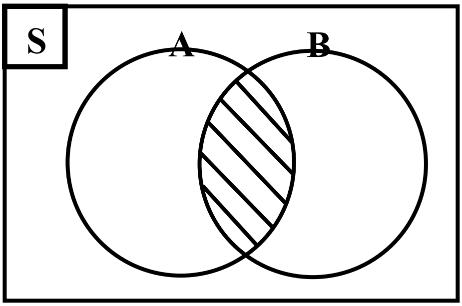
1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$
2. $C \cup D = \{a, b, c, d, e, f, h, i\}$

b. Irisan (*Intersection*)

Irisan dua buah himpunan, misalkan himpunan A dan himpunan B, adalah suatu himpunan di mana semua anggotanya ada di himpunan A dan sekaligus ada di himpunan B. Himpunan A irisan himpunan B disimbolkan dengan $A \cap B$ dan secara definisi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$$

Himpunan A irisan himpunan B dapat digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut dengan daerah yang diarsir adalah himpunan $A \cap B$.



Gambar 3.3

Contoh 3.8

1. Diketahui himpunan $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$. Tentukan $A \cap B$!
2. Diketahui himpunan $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan $D = \{b, d, e, g, h, j, k\}$. Tentukan $C \cap D$!

Penyelesaian

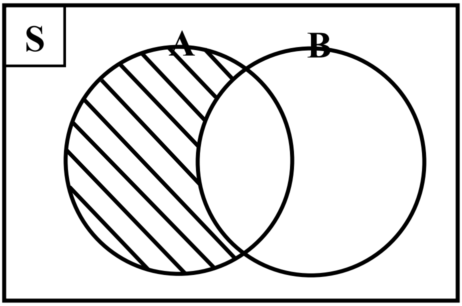
1. $A \cap B = \{4, 6, 8\}$
2. $C \cap D = \{b, d, e, g\}$

c. Selisih

Selisih dua buah himpunan, misalkan himpunan A dan himpunan B, adalah suatu himpunan di mana semua anggotanya ada di himpunan A tetapi tidak ada di anggota himpunan B. Himpunan A selisih himpunan B disimbolkan dengan $A - B$ dan secara definisi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Himpunan A selisih himpunan B dapat digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut dengan daerah yang diarsir adalah himpunan $A - B$.



Gambar 3.4

Contoh 3.9

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ dan $B = \{7, 11, 13, 17, 19\}$. Tentukan $A - B$ dan B $-A$!
2. Diketahui himpunan $C = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ dan $D = \{m, n, o, p, q, r\}$. Tentukan C $-D$!

Penyelesaian

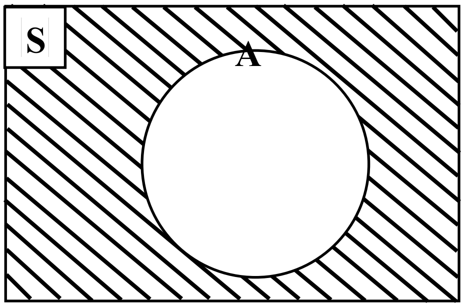
1. $A - B = \{1, 3, 5, 9, 15\}$
   $B - A = \{17, 19\}$
   Berdasarkah hasil di atas maka dapat disimpulkan bahwa $A - B \neq B - A$
2. $C - D = \{s, t, u, v, w\}$

d. Komplemen

Komplemen dari suatu himpunan, misalkan himpunan A, adalah suatu himpunan di mana semua anggotanya bukan anggota dari himpunan A. komplemen himpunan A disimbolkan dengan A^c dan secara definisi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A^c = \{x \in S | x \notin A\}$$

Komplemen himpunan A dapat digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut.



Gambar 3.4

Contoh 3.10

Diketahui suatu himpunan $S = \{x | 1 < x < 10, x \in bilangan\ bulat\}$ dan himpunan $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Tentukan A^c!

Penyelesaian

$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, maka:

$$A^c = \{2, 8, 9\}$$

8. Pembuktian Himpunan

Ada beberapa hukum yang berlaku pada himpunan dan dapat digunakan untuk membuktikan nilai kebenaran dari suatu kesamaan himpunan. Misalkan S adalah semesta pembicaraan dari suatu himpunan dan A, B, C adalah himpunan-himpunan dalam S.

1. Hukum Komutatif
   a. Hukum komutatif pada gabungan berlaku:
   $A \cup B = B \cup A$

b. Hukum komutatif pada irisan berlaku:
   $A \cap B = B \cap A$
2. Hukum Asosiatif
   a. Hukum Asosiatif pada gabungan berlaku:
      $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b. Hukum Asosiatif pada irisan berlaku:
      $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Hukum Distributif
   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Irisan dengan S
   $A \cap S = A$
5. Gabungan dengan S
   $A \cup S = S$
6. Komplemen
   a. $A \cup A^c = S$
   b. $A \cap A^c = \emptyset$
7. Komplemen Ganda
   $(A^c)^c = A$
8. Hukum Idempoten
   a. Hukum Idempoten pada irisan berlaku
      $A \cap A = A$
   b. Hukum Idempoten pada gabungan berlaku
      $A \cup A = A$
9. Hukum De Morgan
   a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   b. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
10. Hukum Penyerapan
   a. $A \cup (A \cap B) = A$
   b. $A \cap (A \cup B) = A$

Contoh 3.11

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$dan $B = \{3, 4, 5\}$. Buktikan dengan hukum komutatif bahwa:
   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$

   Penyelesaian:

   a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   Jadi terbukti bahwa $A \cup B = B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   b. $A \cap B = \{3, 4\}$
   $B \cap A = \{3, 4\}$
   Jadi terbukti bahwa $A \cap B = B \cap A = \{3, 4\}$

2. Diketahui $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, dan $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Buktikan dengan hukum asosiatif bahwa:
   a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   Penyelesaian:

   a. $(A \cup B) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ maka$(A \cup B) \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   $(B \cup C) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$maka$A \cup (B \cup C) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   Jadi terbukti bahwa :
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   $= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   b. $(A \cap B) = \{4, 5\}$ maka $(A \cap B) \cap C = \{5\}$
   $(B \cap C) = \{5, 6, 7\}$ maka$A \cap (B \cap C) = \{5\}$
   Jadi terbukti bahwa $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \{5\}$

3. Diketahui $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, dan $C = \{d, e, f, g\}$. Buktikan dengan hukum distributif bahwa:
   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Penyelesaian:

   a. $(B \cap C) = \{d, e, f\}$ maka $A \cup (B \cap C) = \{a, b, c, d, e, f\}$

$(A \cup B) = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $(A \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
maka $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, c, d, e, f\}$
Jadi terbukti bahwa $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, c, d, e, f\}$

b. $(B \cup C) = \{c, d, e, f, g\}$ maka $A \cap (B \cup C) = \{c, d\}$
$(A \cap B) = \{c, d\}$ dan $(A \cap C) = \{d\}$ maka $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{c, d\}$
Jadi terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{c, d\}$

4. Buktikan pernyataan berikut menggunakan hukum pada himpunan

$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

Penyelesaian:

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c)$
Definisi selisih himpunan

$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$	Hukum distributif
$= (A \cup B) \cap (S)$	Hukum komplemen
$= (A \cup B)$	Hukum Irisan dengan S

Jadi terbukti bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

5. Buktikan pernyataan berikut menggunakan hukum pada himpunan

$$A - (A \cap B) = A - B$$

Penyelesaian:

$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c$
Definisi selisih himpunan

$= A \cap (A^c \cup B^c)$	Hukum De Morgan
$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$	Hukum Distributif
$= S \cup (A \cap B^c)$	Hukum Komplemen
$= (A \cap B^c) \cup S$	Hukum Komutatif
$= A \cap B^c$	Hukum Gabungan dengan S

$= A - B$
Definisi selisih himpunan
Jadi terbukti bahwa $A - (A \cap B) = A - B$

C. Rangkuman

1. Himpunan merupakan sekumpulan objek yang berbeda yang dapat didefinisikan secara jelas.
2. Ada 2 cara yang bisa digunakan untuk menyatakan anggota dari suatu himpunan, yaitu dengan mendaftarkan anggota-anggota himpunannya dan menuliskan notasi pembentuk himpunannya.
3. Himpunan semesta adalah suatu himpunan yang memuat semua objek yang dibicarakan dan disimbolkan dengan S atau U.
4. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota dan dilambangkan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$.
5. Jika terdapat dua buah himpunan, misalkan himpunan A dan himpunan B, dapat dikatakan A merupakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota di himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan B.
6. Jumlah elemen dari suatu himpunan merupakan banyaknya elemen atau anggota yang ada pada himpunan tersebut dan dinyatakan dengan bilangan kardinal.
7. Himpunan kuasa merupakan himpunan yang seluruh anggotanya merupakan kumpulan dari himpunan-himpunan bagian, termasuk di dalamnya himpunan kosong.
8. Ada beberapa operasi yang digunakan dalam himpunan, yaitu gabungan (*union*), irisan (*intersection*), selisih, dan komplemen.

D. Latihan

1. Jelaskan yang dimaksud dengan himpunan, dan berikan contohnya!
2. Tuliskan himpunan-himpunan ini dengan cara mendaftarkan anggota himpunannya!
   a. H = himpunan bilangan cacah kurang dari 7.
   b. S = himpunan bilangan bulat positif.
   c. N = himpunan nama-nama bulan dalam setahun.
3. Jelaskan pengertian dari himpunan semesta dan himpunan kosong! Berikan contohnya!
4. Tentukan mana di antara pernyataan berikut ini yang benar. Berikan alasannya!

a. $2 \in \{2, 4, 6, 8\}$
b. $\{3\} \in \{1, 2, 3\}$
c. $2 \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$
d. $\{4\} \subseteq \{4, 6, 8\}$

5. Misalkan U = {a, b, c, d, e}, A = {a, b, d} dan B = {b, d, e}, carilah:
   a. $A^C \cup B$
   b. $B^c - A^c$
   c. $(A \cap B)^c$
6. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan berikut:
   a. M = { 2, 3, 5}
   b. N = { a, b, c , d}
   c. P = { a, i, u, e, o}
7. Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{2, 3\}$ dan P(X) adalah himpunan kuasa dari X. Tentukan:
   a. $P(A \cap B)$
   b. $P(A \cup B)$

   Tentukan juga jumlah elemen dari masing-masing himpunan kuasa tersebut!
8. Suatu bimbingan belajar memiliki 42 siswa dalam satu kelas. Terdapat 16 siswa yang menyukai bahasa inggris, 14 siswa menyukai matematika, dan 6 orang menyukai keduanya. Hitunglah berapa banyak siswa yang tidak menyukai keduanya! Gambarkan juga diagram venn-nya!
9. Buktikan bahwa $(A - B) \cup (A \cap B) = A$!
10. Buktikan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - B$!

E. Daftar Rujukan

Hasan Sastra Negara. 2014. *Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Jong Jek Siang. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta : Andi.

Jong Jek Siang. 2015. *Logika Matematika (Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi)*. Yogyakarta : Andi.

Nihayati. 2017. “Integrasi Nilai-Nilai Islam Dengan Materi Himpunan (Kajian Terhadap Ayat-ayat Al-Qur’an”. *Jurnal Edumath* 3 (1) : 65-77.

Rinaldi Munir. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Sukirman, dkk. 2017. *Buku Materi Pokok Matematika (Edisi 2)*. Jakarta: Universitas Terbuka.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Gatot Muhsetyo. 2019. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara dan Anggun Nugroho. 2019. *Logika dan Matematika*. Yogyakarta: Andi.

BAB IV

RELASI

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai kata hubungan atau pun relasi di antara suatu objek. Misalnya suatu perusahaan yang ingin melakukan hubungan kerja sama dengan perusahaan yang lainnya. Jika perusahaan tersebut ingin berhasil dalam melakukan hubungan kerja sama maka ada beberapa syarat atau aturan yang harus dilakukan. Begitu juga pada materi yang akan dibahas pada materi di bab ini. Untuk mengetahui apakah persoalan tersebut termasuk relasi atau bukan maka ada beberapa syarat yang harus dipenuhi.

Pada bab ini akan membahas tentang hasil kali kartesian, relasi pada himpunan, operasi pada relasi, relasi invers, sifat relasi, relasi ekuivalensi, dan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan relasi. Materi ini sangat penting untuk dipelajari karena materi ini berkaitan dengan materi berikutnya, yaitu fungsi. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

Tujuan pembelajaran pada materi ini adalah agar Anda dapat:

1. Menjelaskan hasil kali kartesian
2. Menjelaskan relasi pada himpunan
3. Menjelaskan operasi pada relasi
4. Menjelaskan relasi invers
5. Menjelaskan macam-macam sifat relasi
6. Menjelaskan relasi ekuivalensi
7. Menyelesaikan permasalahan matematika yang berkaitan dengan relasi

B. Penyajian Materi

Relasi merupakan suatu aturan di mana anggota himpunan yang satu dipasangkan atau dihubungkan dengan anggota himpunan yang lainnya. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan atau perkawanan atau korespondensi dari anggota-anggota himpunan$A$ ke anggota – anggota himpunan$B$.

Sebagai contoh, misalkan dalam suatu kelas dilakukan pendataan mengenai kegiatan ekstrakurikuler. Akbar memilih kegiatan ekstrakurikuler sepak bola, Bani memilih kegiatan ekstrakurikuler basket, Cika memilih kegiatan ekstrakurikuler tari, Dhika memilih kegiatan ekstrakurikuler basket dan musik, dan Eki memilih kegiatan ekstrakurikuler sepak bola.

Dari contoh tersebut dapat diperoleh informasi yaitu terdapat dua buah himpunan, yaitu himpunan siswa dan himpunan ekstrakurikuler, dan relasi yang sesuai dengan keterangan tersebut adalah relasi “memilih kegiatan ekstrakurikuler”.

1. Hasil Kali Kartesian

Misal diketahui dua buah himpunan, yaitu himpunan A dan B. Hasil kali kartesian A dengan B, yang disimbolkan dengan $A \: x \: B$, adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in b$ dan $b \in a$.

$A \: x \: B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Hasil kali kartesian $A_1 \: x \: A_2 \: x \ldots x A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$

Contoh 4.1

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{c, d\}$. Tentukan hasil kali kartesian $A \: x \: B$!
2. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{c, d\}$, dan $C = \{10, 20\}$. Tentukan hasil kali kartesian $(A \: x \: B) \: x \: C$!

Penyelesaian

1. Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{c, d\}$ maka $A\ x\ B$ adalah:
   $A\ x\ B = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$
2. Berdasarkan jawaban no. 1 sudah diketahui bahwa
   $A\ x\ B = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$

Sehingga kita bisa langsung mencari $(A\ x\ B)\ x\ C$ dengan hasil sebagai berikut.

$$(A\ x\ B)\ x\ C =$$
$$\{\big((1, c), 10\big), \big((1, c), 20\big), \big((1, d), 10\big), \big((1, d), 20\big), \big((2, c), 10\big), \big((2, c), 20\big),$$
$$\big((2, d), 10\big), \big((2, d), 20\big), \big((3, c), 10\big), \big((3, c), 20\big), \big((3, d), 10\big), ((3, d), 20)\}$$

2. Relasi pada Himpunan

Misalkan diketahui dua buah himpunan, yaitu himpunan A dan B. Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A\ x\ B$, dan dinotasikan sebagai $R \subseteq (A\ x\ B)$.

Dikatakan $a\ R\ b$ jika $(a, b) \in A\ x\ B$, atau a berelasi dengan b.

Dikatakan $a\ \cancel{R}\ b$ jika $(a, b) \notin A\ x\ B$, atau a tidak berelasi dengan b.

Contoh 4.2

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$. Didefinisikan relasi R dari himpunan A ke B dengan $(a, b) \in R$ dengan b habis dibagi a. Tentukan himpunan relasi R!

Penyelesaian

Semua anggota atau elemen dari $A\ x\ B$ dapat dinyatakan dalam bentuk tabel, diagram, atau grafik. Contoh bentuk tabel sebagai berikut.

Tabel 4.1

B / A	2	4	6
1	(1, 2)	(1, 4)	(1, 6)
2	(2, 2)	(2, 4)	(2, 6)
3	(3, 2)	(3, 4)	(3, 6)
4	(4, 2)	(4, 4)	(4, 6)
5	(5, 2)	(5, 4)	(5, 6)
6	(6, 2)	(6, 4)	(6, 6)

Berdasarkan tabel di atas maka dapat diketahui bahwa relasi R yang memenuhi fungsi b habis dibagi a adalah $R = \{(1,2),(2,2),(1,4),(2,4),(4,4),(1,6),(2,6),(3,6),(6,6)\}$

3. Operasi pada Relasi

a. Irisan

Beberapa operasi yang dapat digunakan pada relasi juga dapat digunakan pada himpunan karena pada hakikatnya relasi merupakan suatu himpunan. Salah satu operasi yang ada pada relasi adalah operasi irisan (*intersection*). Misalkan diketahui dua buah relasi dari himpunan A dan B, dan relasi tersebut dimisalkan dengan R dan S.

$R \cap S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x, y) \in A \, x \, B$ sedemikian sehingga $(x, y) \in R$ dan $(x, y) \in S$.

$$R \cap S = \{(x, y) | (x, y) \in R \text{ dan } (x, y) \in S\}$$

Contoh 4.3

Diketahui himpunan $A = \{0, 1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Relasi R dan S dari himpunan A ke B sebagai berikut.

$R = \{(0, a), (0, c), (1, b)\}$

$S = \{(0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (2, b)\}$

Tentukan $R \cap S$!

Penyelesaian

$R \cap S = \{(0, c), (1, b)\}$

b. Gabungan

Operasi selanjutnya yang dapat digunakan pada relasi adalah operasi gabungan (*union*). Misalkan diketahui dua buah relasi dari himpunan A dan B, dan relasi tersebut dimisalkan dengan R dan S.

$R \cup S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x, y) \in A\,x\,B$ sedemikian sehingga $(x, y) \in R$ atau $(x, y) \in S$.

$$R \cup S = \{(x, y) | (x, y) \in R \text{ atau } (x, y) \in S\}$$

Contoh 4.4

Diketahui himpunan $A = \{a, b, c\}$dan $B = \{a, b, c, d\}$. Relasi R_1 dan R_2 dari himpunan A ke B sebagai berikut.

$R_1 = \{(b, a), (b, b), (b, c), (b, d)\}$

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

Tentukan $R_1 \cup R_2$!

Penyelesaian

$$R_1 \cup R_2 = \{(b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (a, a), (c, c), (d, d)\}$$

c. Komposisi Relasi

Misalkan diketahui tiga buah himpunan, yaitu himpunan A, B, dan C. Jika R_1 adalah relasi dari himpunan A ke himpunan $B (R_1 \subseteq A\,x\,B)$ dan R_2 adalah relasi dari himpunan B ke himpunan $C (R_2 \subseteq B\,x\,C)$ maka R_1 komposisi R_2, atau yang disimbolkan dengan $R_1 \circ R_2$, adalah relasi yang elemen pertamanya adalah elemen pertama dari R_1 dan elemen keduanya adalah elemen kedua dari R_2 dan didefinisikan sebagai berikut.

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) | (x, y) \in R_1 \; dan \; (y, z) \in R_2\}$$

Contoh 4.5

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, himpunan $B = \{3, 5, 7, 9\}$, dan himpunan $C = \{a, b, c\}$.

   Relasi R_1 merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B $R_1 = \{(1, 3), (1, 7), (2, 5), (3, 5), (3, 7), (3, 9)\}$

   Relasi R_2 merupakan relasi dari himpunan B ke himpunan C

$R_2 = \{(3, a), (3, b), (5, c), (9, a)\}$
Tentukan $R_1 \circ R_2$!

Penyelesaian

Untuk mencari $R_1 \circ R_2$, dapat dibantu dengan menggunakan tabel jika masih sulit untuk mencari jawabannya secara langsung. Adapun cara tabel diberikan sebagai berikut.

Tabel 4.2

R_1	R_2	$R_1 \circ R_2$
(1, 3)	(3, a)	(1, a)
(1, 3)	(3, b)	(1, b)
(2, 5)	(5, c)	(2, c)
(3, 5)	(5, c)	(3, c)
(3, 9)	(9, a)	(3, a)

Jadi $R_1 \circ R_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c), (3, a)\}$

2. Diketahui R dan S adalah dua buah relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif **I**.
   $R = \{(x, 3x) | x \in \boldsymbol{I}\}$ dan
   $S = \{(x, 4x) | x \in \boldsymbol{I}\}$
   Tentukan $R \circ S$ dan $R \circ R$!

   Penyelesaian

   $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15), (6, 18), (7, 21), (8, 24), (9, 27), \dots\}$
   $S = \{(1, 4), (2, 8), (3, 12), (4, 16), (5, 20), (6, 24), (7, 28), (8, 32), (9, 36), \dots\}$

   Sehingga,
   Untuk $R \circ S = \{(1, 12), (2, 24), (3, 36), \dots\} = \{(x, 12x) | x \in \boldsymbol{I}\}$
   Untuk $R \circ R = \{(1, 9), (2, 18), (3, 27)\} = \{(x, 9x) | x \in \boldsymbol{I}\}$

4. Relasi Invers

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R yang disimbolkan dengan R^{-1} adalah relasi dari himpunan B ke himpunan A dan didefinisikan sebagai berikut.

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

Contoh 4.6

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Didefinisikan relasi $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ dari himpunan A ke himpunan B. Tentukan R^{-1}!
2. Diketahui himpunan $A = \{2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 10\}$. Didefinisikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B sebagai berikut.

$$(a, b) \in R \text{ jika} a \text{ habis membagi } b$$

Tentukan R^{-1}!

Penyelesaian

1. Relasi invers dari relasi R adalah $R^{-1} = \{(a, 1), (c, 1), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$
2. Relasi R yang memenuhi definisi a habis membagi b adalah:
   $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 10), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 10)\}$

Jadi R^{-1} adalah invers dari relasi R, yaitu relasi dari himpunan B ke himpunan A dengan:

$(b, a) \in R^{-1}$ jika b adalah kelipatan dari a

5. Sifat Relasi

Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan A.

a. Refleksif (*Refleksif*)

<u>Definisi:</u>

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 4.7

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A.

a. $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

b. $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

Dari kedua relasi tersebut, manakah relasi yang bersifat refleksif ?

Penyelesaian

a. Bersifat refleksif, karena setiap elemen dari relasi R memenuhi definisi (a, a), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4)
b. Tidak bersifat refleksif, karena ada $(a, a) \notin R$, yaitu (3, 3) $\notin R$.

b. Menghantar (*Transitive*)

Definisi:

Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$ untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 4.8

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A.

a. $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
b. $R = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$
c. $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
d. $R = \{(1,2), (3,4)\}$

Dari relasi tersebut, manakah relasi yang bersifat menghantar?

Penyelesaian

Untuk membuktikan apakah relasi tersebut bersifat transitif atau tidak, bisa menggunakan tabel kebenaran pada materi logika (yaitu disjungsi, konjungsi, implikasi, dan biimplikasi)

a. Bersifat menghantar, karena semua elemen pada relasi R memenuhi definisi dari menghantar, yaitu:
   - $(1,3) \in R$ dan $(3,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$
     B ∧ B ⇒ B
     B ⇒ B
     B (Benar)
   - $(1,1) \in R$ dan $(1,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$
     B ∧ B ⇒ B (Benar)
   - $(4,2) \in R$ dan $(2,1) \in R \Rightarrow (4,1) \in R$
     B ∧ B ⇒ B (Benar)
   - $(4,3) \in R$ dan $(3,1) \in R \Rightarrow (4,1) \in R$

B ∧ B ⇒ B (Benar)

b. Bersifat tidak menghantar, karena ada elemen pada relasi R yang tidak memenuhi definisi dari menghantar, yaitu:
   - $(2,4) \in R$ dan $(4,2) \in R \Rightarrow (2,2) \notin R$
     B ∧ B ⇒ S (Salah)
   - $(4,2) \in R$ dan $(2,3) \in R \Rightarrow (4,3) \notin R$
     B ∧ B ⇒ S (Salah)
c. Bersifat menghantar, karena semua elemen pada relasi R memenuhi definisi dari menghantar. Untuk pembuktiannya, salah satunya sudah dijelaskan pada soal (a)
d. Bersifat menghantar, karena :
   - $(1,2) \in R$ dan $(2,\ldots) \notin R \Rightarrow (1,\ldots) \notin R$
     B ∧ S ⇒ S
     S ⇒ S
     B (Benar)
   - $(3,4) \in R$ dan $(4,\ldots) \notin R \Rightarrow (3,\ldots) \notin R$
     B ∧ S ⇒ S
     S ⇒ S
     B (Benar)

   Jadi meskipun $(b,c) \notin R$ dan$(a,c) \notin R$ tetapi hasil akhir tetap bernilai Benar.Hal ini dikarenakan nilai kebenaran dari konjungsi dan biimplikasi.
e. Bersifat menghantar karena relasi yang hanya berisi satu elemen selalu bersifat menghantar, dan bisa dibuktikan dengan nilai kebenaran dari konjungsi dan biimplikasi seperti soal (d)

c. Setangkup (*Symmetric*)

Definisi:

Relasi Rpada himpunan *A* disebut setangkup jika untuk semua $a, b \in A$, jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$.

Relasi R pada himpunan *A* disebut tidak setangkup jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \notin R$.

Contoh 4.9

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A.

a. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2)\}$
b. $R = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$

Dari kedua relasi tersebut, manakah relasi yang bersifat setangkup ?

Penyelesaian

a. Bersifat setangkup, karena setiap elemen dari relasi R memenuhi definisi dari setangkup, contohnya $(1,2) \in R$ maka $(2,1) \in R$, begitu juga untuk elemen yang lainnya.
b. Bersifat tidak setangkup, karena ada elemen dari relasi R yang tidak menenuhi definisi dari setangkup, yaitu $(2,3) \in R$ maka $(3,2) \notin R$.

d. Tolak Setangkup (*Antisymmetric*)

Definisi:

Relasi R pada himpunan *A* disebut tolak setangkup jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$ untuk semua $a, b \in A$.

Relasi Rpada himpunan *A* disebut tolak setangkup jika ada elemen berbeda a dan b maka $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$ untuk semua $a, b \in A$.

Contoh 4.10

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A.

a. $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
b. $R = \{(1,1), (2,4), (4,3)\}$

Dari kedua relasi tersebut, manakah relasi yang bersifat tolak setangkup?

Penyelesaian

Untuk membuktikan apakah relasi tersebut bersifat tolak setangkup atau tidak, bisa menggunakan tabel kebenaran pada materi logika (yaitu disjungsi, konjungsi, implikasi, dan biimplikasi)

a. Bersifat tolak setangkup, karena setiap elemen dari relasi R memenuhi definisi dari tolak setangkup. Salah satu contohnya:

   $(1,1) \in R$ dan $(1,1) \in R \Rightarrow (1 = 1)$

   B ∧ B ⇒ B

   B ⇒ B

   B (Benar)

b. Bersifat tolak setangkup, karena setiap elemen dari relasi R memenuhi definisi dari tolak setangkup, yaitu:

   - $(2,4) \in R$ dan $(4,2) \notin R \Rightarrow (2 \neq 4)$

     B ∧ S ⇒ S

     S ⇒ S

     B (Benar)

   - $(4,3) \in R$ dan $(3,4) \notin R \Rightarrow (4 \neq 3)$

     B ∧ S ⇒ S

     S ⇒ S

     B (Benar)

Jadi meskipun $(b,a) \notin R$ dan$a \neq b$ tetapi hasil akhir tetap bernilai Benar. Hal ini dikarenakan nilai kebenaran dari konjungsi dan biimplikasi.

6. Relasi Ekuivalensi

Misalkan R adalah relasi biner pada himpunan A. Relasi R disebut relasi ekuivalensi (pada himpunan A) jika relasi R memenuhi sifat refleksif (*refleksif*), menghantar (*transitive*), dan setangkup (*symmetric*).

Contoh 4.11

Diketahui himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A.

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2)\}$

Apakah relasi R tersebut merupakan relasi ekuivalen pada himpunan A?

Penyelesaian

a. Relasi R tersebut bersifat refleksif, karena setiap elemen dari relasi R memenuhi definisi(a, a), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4).

b. Relasi R tersebut bersifatmenghantar, karena semua elemen pada relasi R memenuhi definisi dari menghantar, yaitu:

- $(1, 1) \in R$ dan $(1, 1) \in R \Rightarrow (1, 1) \in R$
  B ∧ B ⇒ B (Benar)
- $(2, 2) \in R$ dan $(2, 2) \in R \Rightarrow (2, 2) \in R$
  B ∧ B ⇒ B (Benar)
- $(3, 3) \in R$ dan $(3, 3) \in R \Rightarrow (3, 3) \in R$
  B ∧ B ⇒ B (Benar)
- $(4, 4) \in R$ dan $(4, 4) \in R \Rightarrow (4, 4) \in R$
  B ∧ B ⇒ B (Benar)
- $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \in R \Rightarrow (2, 2) \in R$
  B ∧ B ⇒ B (Benar)

c. Relasi R tersebut bersifat setangkup, karena semua elemen pada relasi R memenuhi definisi dari setangkup, contohnya $(2, 3) \in R$maka $(3, 2) \in R$, begitu juga untuk elemen yang lainnya.

C. Rangkuman

1. Relasi merupakan suatu aturan yang memasangkan dari anggota himpunan yang satu ke himpunan yang lainnya.
2. Hasil kali kartesian A dengan B, yang disimbolkan dengan $A\ x\ B$, adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in b$ dan $b \in a$.
3. Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A\ x\ B$, dan dinotasikan sebagai $R \subseteq (A\ x\ B)$.
4. Ada 3 operasi yang bisa digunakan dalam relasi, yaitu gabungan, irisan, dan komposisi relasi.
5. Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B maka invers dari relasi R yang disimbolkan dengan R^{-1} adalah relasi dari himpunan B ke himpunan A.

6. Ada beberapa sifat yang ada pada relasi, yaitu refleksif (*refleksif*), menghantar (*transitive*), setangkup (*symmetric*), dan tolak setangkup (*antisymmetric*).
7. Misalkan R adalah relasi biner pada himpunan A. Relasi R disebut relasi ekuivalensi (pada himpunan A) jika relasi R memenuhi sifat refleksif (*refleksif*), menghantar (*transitive*), dan setangkup (*symmetric*).

D. Latihan

1. Diketahui relasi biner R dari R (himpunan bilangan real) ke R sebagai berikut.

   Untuk semua $(x, y) \in \mathrm{R}\ x\ \mathrm{R}$ di mana $x\ R\ y \iff y = 2x$

   Tentukan manakah pernyataan berikut ini yang benar dan berikan alasannya.

   a. $4\ R\ 8$
   b. $5\ R\ 15$
   c. $4\ R\ 8$
   d. $10\ R\ 20$
2. Diketahui himpunan $A = \{b, d, e, f\}$,$B = \{1, 4, 6, 9\}$, dan $C = \{1, 2\}$. Tentukan:

   a. $A\ x\ C$
   b. $(A\ x\ B)\ x\ C$
3. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R dari himpunan A ke B dengan $(a, b) \in R$ dengan penjumlahan $a + b$ memiliki hasil bilangan genap. Tentukan himpunan relasi R!
4. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4,\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Relasi R_1 dan R_2 dari himpunan A ke B sebagai berikut.

   $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$
   $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3,)\ (4, 4)\}$
   Tentukan:

   a. $R_1 \cap R_2$
   b. $R_1 \cup R_2$
5. Diketahui dua buah relasi sebagai berikut.

   $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3,1)\}$

$$S = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,2)\}$$

Tentukan:

a. $R \circ S$

b. $R \circ R$

6. Diketahui himpunan A = {Aji, Bani, Carly, Deka} dan B = {Basket, Renang, Sepak bola}. Didefinisikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B yaitu "A menyukai olahraga B" dengan relasi R sebagai berikut.
   R = {(Aji, Renang), (Bani, Basket), (Bani, Renang), (Carly, Sepak bola), (Deka, Basket)}
   Tentukan R^{-1} dan definisikan relasi invers tersebut!
7. Diketahui relasi $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\}$ didefinisikan pada himpunan $A = \{1,2,3,4\}$. Tentukan apakah relasi R bersifat refleksif, menghantar, setangkup, dan tolak setangkup? Berikan alasannya!
8. Berdasarkan soal no (4) apakah relasi R tersebut ekuivalen pada himpunan *A* ? Berikan alasannya!

E. Daftar Rujukan

Hasan Sastra Negara. 2014. *Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Jong Jek Siang. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta : Andi.

Jong Jek Siang. 2015. *Logika Matematika (Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi)*. Yogyakarta : Andi.

Rinaldi Munir. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Sukirman, dkk. 2017. *Buku Materi Pokok Matematika (Edisi 2)*. Jakarta: Universitas Terbuka.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Gatot Muhsetyo. 2019. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara dan Anggun Nugroho. 2019. *Logika dan Matematika*. Yogyakarta: Andi.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S. 2004. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

BAB V

FUNGSI

A. Pendahuluan

Fungsi sangat erat kaitannya dengan relasi, di mana fungsi merupakan himpunan bagian dari relasi, tetapi keduanya memiliki definisi yang berbeda. Jika Anda belum bisa memahami konsep dari relasi maka Anda tidak akan bisa mempelajari materi fungsi ini.

Pada bab ini akan membahas tentang fungsi pada himpunan, kesamaan fungsi, fungsi injektif, surjekti, dan bijektif, fungsi invers, komposisi fungsi, dan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

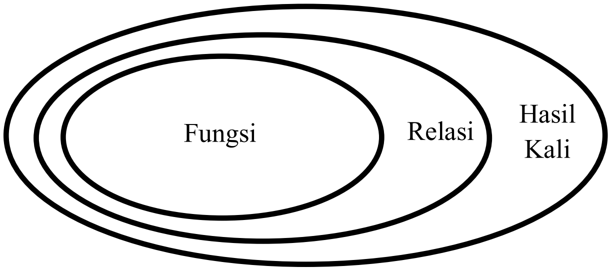
Tujuan pembelajaran pada materi ini adalah agar Anda dapat:

1. Menjelaskan fungsi pada himpunan
2. Menjelaskan kesamaan fungsi
3. Menjelaskan perbedaan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif
4. Menjelaskan fungsi invers
5. Menjelaskan komposisi fungsi
6. Menyelesaikan permasalahan matematika yang berkaitan dengan fungsi

B. Penyajian Materi

1. Fungsi pada Himpunan

Fungsi, relasi, dan hasil kali kartesian dari himpunan X ke himpunan Y dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 5.1

Suatu fungsi f dari himpunan X ke Y (disimbolkan dengan $f: X \rightarrow Y$) disebut sebagai suatu relasi dari X ke Y jika memenuhi syarat yaitu setiap elemen $x \in X$ mempunyai kawan tunggal di Y. X disebut daerah asal (domain) f dan Y disebut kodomain f. Kawan dari suatu elemen $x \in X$ disimbolkan dengan $f(x)$ dan dibaca “harga fungsi f di x”. Himpunan semua harga fungsi f disebut daerah hasil (*range*) f.

$$Range\ f = \{y \in Y | y = f(x) \text{untuk semua } x \in X\}$$

Fungsi f dari himpunan X ke Y dapat didefinisikan sebagai berikut.

f adalah fungsi dari X ke Y $\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists!\, y \in Y) f(x) = y$

Simbol ∃! dibaca ‘terdapatlah dengan tunggal’.

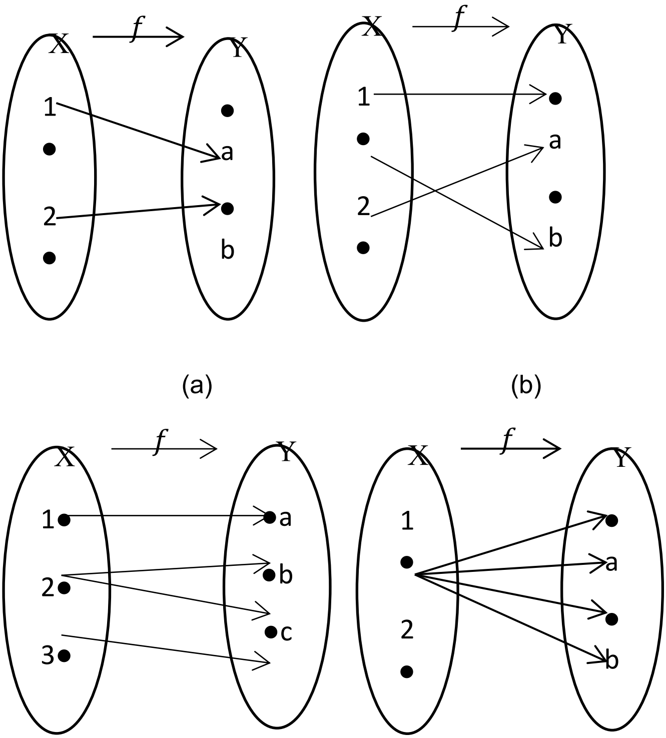
Jadi terdapat dua syarat jika suatu relasi f dari X ke Y disebut sebagai fungsi yaitu:

1. Setiap elemen $x \in X$ memiliki kawan di Y (disebut $f(x)$)
2. $f(x)$ tunggal

Dari penjelasan tersebut maka dapat dikatakan bahwa suatu elemen $y \in Y$ boleh tidak memiliki kawan di X atau memiliki beberapa kawan di X.

Contoh 5.1

1. Diketahui himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan $Y = \{a, b, c, d\}$. Perhatikan relasi berikut.



(a) (b)

(c) (d)

Gambar 5.2

Berdasarkan diagram panah dari (a) sampai (d) manakah yang merupakan fungsi dari X ke Y ?

Penyelesaian

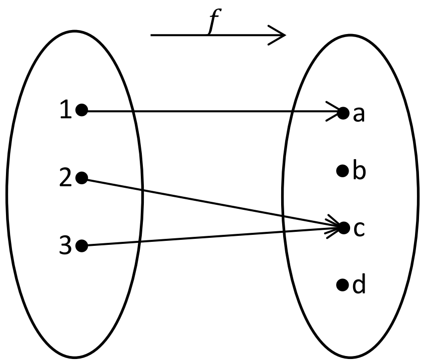
Untuk mengetahui apakah suatu relasi merupakan suatu fungsi maka harus memenuhi 2 syarat, yaitu:

1. Setiap elemen $x \in X$ memiliki garis keluar dari x
2. Setiap elemen $x \in X$ yang menuju himpunan Y tidak boleh lebih dari satu (harus tunggal)

Jadi penyelesaian dari persoalan tersebut adalah:

a. Bukan merupakan fungsi, karena syarat pertama tidak terpenuhi.
b. Merupakan fungsi, karena semua syarat terpenuhi.
c. Bukan merupakan fungsi, karena syarat ke 2 tidak terpenuhi.
d. Bukan merupakan fungsi, karena syarat pertama dan syarat ke 2 tidak terpenuhi.

2. Diketahui himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan $Y = \{a, b, c\}$ dan didefinisikan fungsi $f: X \rightarrow Y$ sebagai berikut.



Gambar 5.3

Berdasarkan diagram panah tersebut, tentukanlah:

a. Daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil dari fungsi f
b. $f(1), f(2), f(3)$

Penyelesaian

a. Daerah asal (domain) dari fungsi f adalah himpunan $X = \{1, 2, 3\}$.

   Daerah kawan (kodomain) dari fungsi f adalah himpunan $Y = \{a, b, c, d\}$

   Daerah hasil (range) dari fungsi f adalah $\{a, c\}$
b. Nilai dari $f(1) = a$, $f(2) = c$, dan $f(3) = c$.

3. Diketahui suatu fungsi f ditentukan oleh $f: x \to 3x + 3$ dengan anggota himpunan bilangan bulat positif. Tentukanlah:
   a. Rumus fungsi f
   b. Nilai fungsi f untuk $x = 5$
   c. Jika $f(a) = 15$, maka tentukan nilai dari a

   Penyelesaian

   a. Rumus fungsi $f(x) = 3x + 3$
   b. Nilai fungsi untuk $x = 5$, yaitu:
      $f(5) = 3\,(5) + 3$
      $= 15 + 3$
      $= 18$
   c. $f(a) = 15$ maka $f(a) = 3a + 3$
      $15 = 3a + 3$
      $12 = 3a$
      $a = 4$

   Jadi nilai dari a adalah 4

2. Kesamaan Fungsi

Misalkan diketahui 2 buah fungsi, yaitu fungsi f dan fungsi g. Kedua fungsi tersebut adalah fungsi-fungsi dari himpunan X ke himpunan Y. Fungsi f akan dikatakan sama dengan fungsi g ($f = g$) jika dan hanya $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Contoh 5.2

Diketahui suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = (x-3)(x+2)\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = x^2 - x - 6\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Periksalah apakah $f = g$!

Penyelesaian

Untuk mengetahui apakah $f = g$ maka harus dicek terlebih dahulu bahwa $f(x) = g(x)$. Untuk mengecek harga dari fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ tidak memungkinkan untuk dicek satu per satu. Hal ini dikarenakan semesta yang dibicarakan adalah $\mathbb{R}$ atau bilangan riil.

Sehingga untuk mengecek apakah $f(x) = g(x)$ maka dapat digunakan rumus eksplisit yang telah diberikan. Ambil sembarang $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = (x-3)(x+2)$
$= (x^2 - 3x + 2x - 6)$
$= (x^2 - x - 6)$
$= g(x)$

Berdasarkan penjabaran tersebut maka dapat diketahui bahwa $f(x) = g(x)$. Karena $f(x) = g(x)$ maka terbukti bahwa $f = g$.

3. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

a) Fungsi Injektif

Misalkan ada dua buah himpunan, yaitu Xdan Y, dan f merupakan fungsi dari X ke Y. Fungsi f disebut fungsi injektif (*one to one*) jika dan hanya jika setiap anggota dihimpunan Y memiliki kawan paling banyak satu dihimpunan X dan artinya $y \in Y$ boleh tidak memiliki kawan di X. Fungsi injektif dapat didefinisikan sebagai berikut.

$f : X \to Y$ adalah fungsi injektif $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

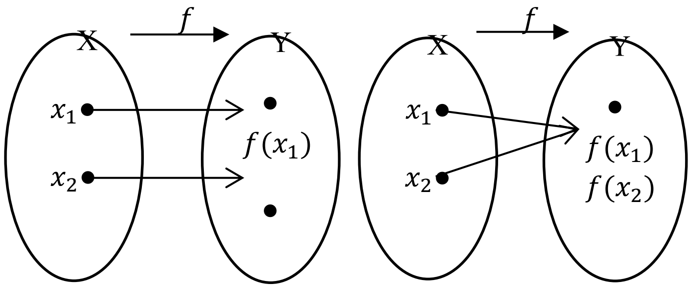
Atau kontraposisinya sebagai berikut.

$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ingkaran dari fungsi injektif tersebut adalah sebagai berikut.

$f : X \to Y$ bukan fungsi injektif $\Leftrightarrow (\exists x_1, x_2 \in X)\ f(x_1) = f(x_2)$ tetapi $x_1 \neq x_2$

Fungsi injektif dan bukan fungsi injektif dapat digambarkan pada diagram panah sebagai berikut.



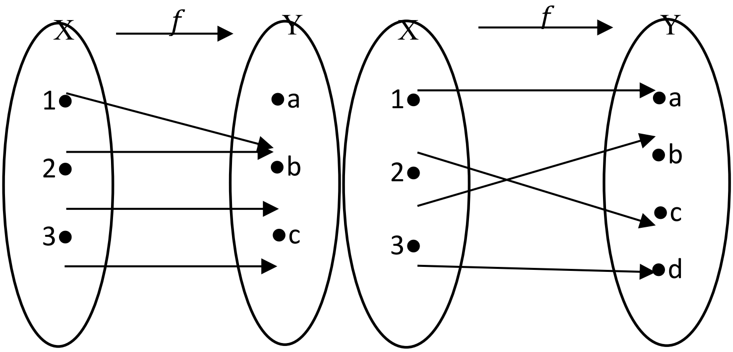
(a) (b)

Gambar 5.4

Berdasarkan diagram panah tersebut dapat diketahui bahwa gambar (a) merupakan fungsi injektif. Hal ini dikarenakan setiap elemen yang ada di himpunan X memiliki kawan paling banyak satu di himpunan $(f(x_1) \neq f(x_2))$. Sedangkan gambar (b) bukan merupakan fungsi injektif. Hal ini dikarenakan semua elemen yang ada dihimpunan X memiliki kawan yang sama dihimpunan $(f(x_1) = f(x_2))$.

Contoh 5.3

Perhatikan diagram panah berikut ini. Tentukan manakah di antara diagram panah tersebut yang merupakan fungsi injektif dari X ke *Y*!



(a) (b)

Gambar 5.5

Penyelesaian

Untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi injektif, cukup melihat dari kodomainnya saja. Jika elemen di kodomainnya ada yang memiliki kawan lebih dari satu di X berarti fungsi tersebut bukan fungsi injektif.

a. Bukan merupakan fungsi injektif. Hal ini dikarenakan ada elemen di Y yang memiliki kawan di X lebih dari satu, yaitu $b \in Y$ memiliki kawan di X lebih dari satu (elemen 1 dan 2).
b. Merupakan fungsi injektif. Hal ini dikarenakan setiap elemen di Y memiliki kawan di X paling banyak satu. Perhatikan bahwa $a \in Y$ tidak harus memiliki kawan di X.

b) Fungsi Surjektif

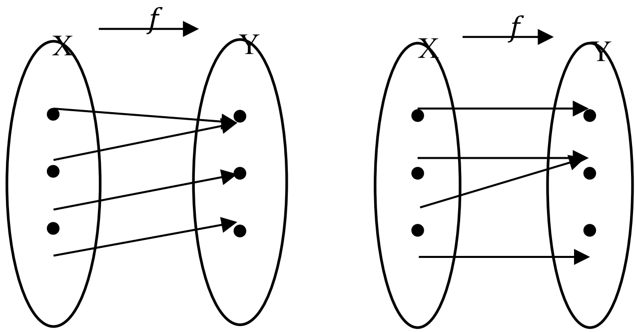
Misalkan ada dua buah himpunan, yaitu Xdan Y, dan f merupakan fungsi dari X ke Y. Fungsi f disebut fungsi surjektif (*onto*) jika dan hanya jika setiap anggota dihimpunan Y memiliki kawan dihimpunan X dan artinya $y \in Y$ boleh memiliki kawan lebih dari satu di X. Fungsi surjektif dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$f : X \to Y \text{ adalah fungsi surjektif} \Leftrightarrow (\forall y \in Y)(\exists x \in X) f(x) = y$$

Ingkaran dari fungsi surjektif tersebut adalah sebagai berikut.

$$f : X \to Y \text{ bukan fungsi surjektif} \Leftrightarrow (\exists y \in Y)(\forall x \in X)\ f(x) \neq y$$

Fungsi surjektif dan bukan fungsi surjektif dapat digambarkan pada diagram panah sebagai berikut.



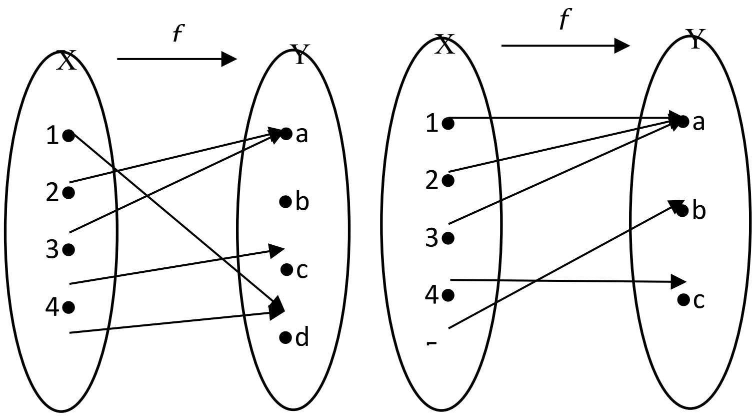
(a) (b)

Gambar 5.6

Berdasarkan diagram panah tersebut dapat diketahui bahwa gambar (a) merupakan fungsi surjektif. Hal ini dikarenakan setiap elemen yang ada di himpunan X memiliki kawan dihimpunan Y dan kawan dari $y \in Y$ boleh lebih dari satu.Sedangkan gambar (b) bukan merupakan fungsi surjektif. Hal ini dikarenakan ada $y \in Y$ yang tidak memiliki kawan di X.

Contoh 5.4

Tentukan manakah di antara diagram panah tersebut yang merupakan fungsi surjektif dari X ke Y!



(a) (b)

Gambar 5.7

Penyelesaian

Untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi surjektif, cukup melihat dari kodomainnya saja. Jika elemen di kodomainnya ada yang tidak memiliki kawan di X berarti fungsi tersebut bukan fungsi surjektif.

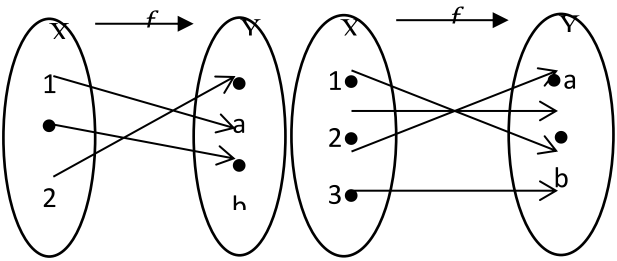
a. Bukan merupakan fungsi surjektif. Hal ini dikarenakan ada elemen di Y yang tidak memiliki kawan di X, yaitu $b \in Y$ tidak memiliki kawan di X.
b. Merupakan fungsi surjektif. Hal ini dikarenakan setiap elemen di Y memiliki kawan di X. Perhatikan bahwa $a \in Y$ boleh memiliki kawan lebih dari satu di X.

c) Fungsi Bijektif

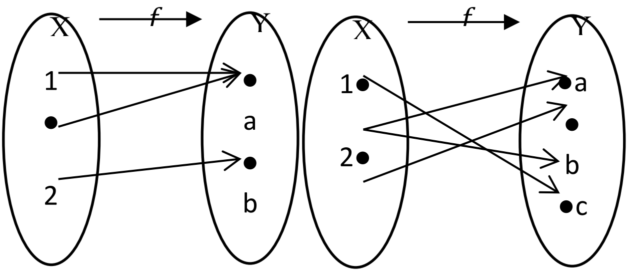
Misalkan ada dua buah himpunan, yaitu X dan Y, dan f merupakan fungsi dari X ke Y. Fungsi f disebut fungsi bijektif jika fungsi tersebut memenuhi injektif dan surjektif.

Contoh 5.5

Tentukan manakah di antara diagram panah tersebut yang merupakan fungsi bijektif dari X ke *Y!*



(a) (b)



(c) (d)

Gambar 5.8

Penyelesaian

Untuk menentukan apakah suatu fungsi bijektif atau tidak, harus dicek terlebih dahulu apakah fungsi tersebut merupakan fungsi injektif dan surjektif.

a. f merupakan fungsi injektif tetapi tidak surjektif. Hal ini dikarenakan ada elemen di Y yang tidak memiliki kawan di X, yaitu $b \in Y$ dan $e \in Y$ tidak memiliki kawan di X.
   Karena fungsi tersebut hanya memenuhi salah satu fungsi saja, yaitu fungsi injektif, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut tidak bijektif.
b. Merupakan fungsi injektif dan surjektif.
   Karena fungsi tersebut memenuhi keduanya, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif.
c. Bukan merupakan fungsi injektif dan surjektif. Hal ini dikarenakan ada elemen di Y yang memiliki kawan di X lebih dari satu, yaitu $a \in Y$ memiliki kawan di X lebih dari satu (elemen 1 dan 2). Selain itu juga, ada elemen di Y yang tidak memiliki kawan di X, yaitu $b \in Y$, $c \in Y$, dan $e \in Y$.
   Karena fungsi tersebut tidak memenuhi keduanya maka dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut juga tidak bijektif, tetapi merupakan fungsi.

d. Bukan merupakan fungsi injektif dan surjektif. Selain itu juga diagram panah tersebut tidak memenuhi syarat fungsi, karena syarat ke (2) dari fungsi tidak terpenuhi, yaitu garis yang keluar dari setiap elemen $x \in X$ harus tunggal.

Berdasarkan soal tersebut dapat dikatakan bahwa fungsi yang injektif belum tentu surjektif, begitu juga sebaliknya, fungsi yang surjektif belum tentu injektif.

Suatu fungsi disebut bijektif jika fungsi tersebut memenuhi syarat injektif dan surjektif. Jika melihat dari diagram panah pada soal (b) terlihat bahwa fungsi tersebut bijektif, karena setiap $x \in X$ memiliki kawan tepat satu di $y \in Y$.

4. Fungsi Invers

Misalkan diketahui suatu fungsi $f : X \to Y$. Berdasarkan penjelasan sebelumnya, diketahui bahwa jika ada suatu relasi dari himpunan Y ke himpunan X maka belum tentu bisa dikatakan bahwa relasi tersebut juga disebut sebagai fungsi. Akan tetapi, jika fungsi $f : X \to Y$ merupakan fungsi bijektif maka setiap $y \in Y$ memiliki kawan tepat satu di himpunan X, sehingga dapat dikatakan bahwa relasi dari himpunan Y ke himpunan X bisa disebut juga sebagai fungsi dari Y ke X. Fungsi dari Y ke X ini lah yang disebut sebagai fungsi invers Y ke f, yang disimbolkan dengan f^{-1}.

Misalkan fungsi $f : X \to Y$ merupakan fungsi bijektif dan misalkan juga bahwa $y \in Y$, maka fungsi invers dari fungsi f didefinisikan sebagai berikut.

$f^{-1}(y)$ =elemen$x \in X$ sedemikian sehingga $f(x) = y$

Jadi dapat dikatakan bahwa $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Contoh 5.6

Diketahui suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = 4x - 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tentukanlah fungsi invers dari fungsi f tersebut!

Penyelesaian

Untuk mengetahui fungsi invers dari fungsi tersebut, pertama kali harus dicek apakah fungsi tersebut bijektif. Tetapi untuk soal ini asumsikan bahwa fungsi tersebut benar bijektif, sehingga kita bisa mencari f^{-1} dari fungsi f tersebut.

Ambil sembarang $x \in \mathbb{R}$ dengan $f(x) = y$

Fungsi inversnya adalah $f^{-1}(y) = x$

$y = f(x)$

$y = 4x - 8$

$y + 8 = 4x$

$\frac{1}{4}y - 2 = x$ atau

$$x = \frac{1}{4}y - 2$$

Sehingga adalah $f^{-1}(y) = x = \frac{1}{4}y - 2$

Jadi fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 2$

5. Komposisi Fungsi

Misalkan terdapat dua buah fungsi, yaitu fungsi $f: X \to Y$ dan $g: Y' \to Z$. Ke dua fungsi tersebut memenuhi sifat kodomain $f(= Y) \subseteq$ domain $g\ (= Y')$. Adapun definisi komposisi dari g dan f, yang disimbolkan dengan $(f \circ g)$ adalah sebagai berikut.

$$(\forall x \in X)(g \circ f)(X) = g(f(x))$$

Contoh 5.7

Diketahui dua buah fungsi, yaitu f dan g, difungsikan pada himpunan bilangan bulat Z. fungsi tersebut didefinisikan sebagai berikut.

$f(n) = 5 + n^2$ dan $g(n) = 3n - 4$, $\forall n \in Z$

Tentukan :

a. $(g \circ f)(n)$ dan $(g \circ f)(3)$
b. $g(g(n))$
c. $f\big(f(n)\big)$
d. Apakah $(g \circ f)(n) = (f \circ g)(n)$

Penyelesaian

a. $(g \circ f)(n) = g(f(n))$
$= g(5 + n^2)$
$= 3(5 + n^2) - 4$

$= 15 - 3n^2 - 4$
$= 11 - 3n^2$
$(g \circ f)(3) = 11 - 3(3)^2$
$= 11 - 27$
$= -16$

b. $g\big(g(n)\big) = g(3n - 4)$
$= 3(3n - 4) - 4$
$= 9n - 12 - 4$
$= 9n - 16$

c. $f\big(f(n)\big) = f(5 + n^2)$
$= 5 + (5 + n^2)^2$
$= 5 + (25 + 10n^2 + n^4)$
$= 30 + 10n^2 + n^4$

d. $(f \circ g)(n) = f(g(n))$
$= f(3n - 4)$
$= 5 + (3n - 4)^2$
$= 5 + (9n^2 - 24n + 16)$
$= 9n^2 - 24n + 21$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $(g \circ f)(n) \neq (f \circ g)(n)$

C. Rangkuman

1. Suatu fungsi f dari himpunan X ke Y disebut sebagai relasi dari himpunan X ke Y jika setiap elemen $x \in X$ yang menuju himpunan Y memiliki kawan tunggal.
2. Fungsi f akan dikatakan sama dengan fungsi g ($f = g$) jika dan hanya jika $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in X$.
3. Ada 3 macam fungsi, yaitu injektif, surjektif, dan bijektif.
4. Fungsi f disebut fungsi injektif (*one to one*) jika dan hanya jika setiap anggota dihimpunan Y memiliki kawan paling banyak satu dihimpunan X dan artinya $y \in Y$ boleh tidak memiliki kawan di X.
5. Fungsi f disebut fungsi surjektif (*onto*) jika dan hanya jika setiap anggota dihimpunan Y memiliki kawan dihimpunan X dan artinya $y \in Y$ boleh memiliki kawan lebih dari satu di X.
6. Fungsi f disebut fungsi bijektif jika fungsi tersebut memenuhi injektif dan surjektif.

7. Definisi komposisi dari fungsi g dan f, yang disimbolkan dengan $(f \circ g)$ adalah $(\forall x \in X)(g \circ f)(X) = g(f(x))$.

D. Latihan

1. Didefinisikan fungsi atas bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai berikut :

   $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dengan aturan $f(n) = n^2, \ \forall n \in \mathbb{Z}$

   a. Gambarlah diagram panah f
   b. Carilah $f(2)$ dan $f(f(2)$
   c. Carilah $f(2n)$, $f(n+2)$, dan $f(n-1)$
2. Misalkan diketahui himpunan $X = \{1, 5, 9\}$ dan $Y = \{3, 4, 7\}$ didefinisikan oleh fungsi $g: X \to Y$ dengan $g(1) = 7$, $g(5) = 3$, dan $g(9) = 4$. Apakah *g* injektif ? surjektif ? bijektif ?
3. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $Z = \{1, 2\}$.
   a. Buatlah fungsi $f: X \to Y$ yang injektif, tetapi tidak surjektif!
   b. Buatlah fungsi $g: X \to Z$ yang surjektif, tetapi tidak injektif!
4. Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^3 - 2$. Tentukan apakah fungsi f tersebut merupakan fungsi f^{-1} ? Jika iya maka tentukanlah $f^{-1}(x)$ tersebut, jika tidak ada maka berikan alasannya!

5. Misalkan *f*, *g*, dan *h* merupakan fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan real dengan $f(x) = x + 2$, $g(x) = x - 2$, dan $h(x) = x + 4$. Tentukanlah
   a. $g \circ h(x)$
   b. $f \circ f(x)$
   c. $f \circ g \circ h(x)$
   d. $f \circ g(5)$

E. Daftar Rujukan

Hasan Sastra Negara. 2014. *Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Jong Jek Siang. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta : Andi.

Jong Jek Siang. 2015. *Logika Matematika (Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi)*. Yogyakarta : Andi.

Rinaldi Munir. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Sukirman, dkk. 2017. *Buku Materi Pokok Matematika (Edisi 2)*. Jakarta: Universitas Terbuka.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Gatot Muhsetyo. 2019. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara dan Anggun Nugroho. 2019. *Logika dan Matematika*. Yogyakarta: Andi.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S. 2004. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

BAB VI

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

A. Pendahuluan

Sebelum mempelajari materi ini, Anda harus memahami terlebih dahulu materi tentang operasi hitung penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada himpunan bilangan bulat. Materi ini sangat sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya pada saat Anda sedang pergi ke pasar maka Anda akan bertemu dengan harga dari barang-barang yang ada di sana yang secara tidak langsung Anda bertemu dengan persamaan linear. Contoh lainnya misalnya Anda ingin menghitung keliling kebun yang berbentuk persegi panjang. Untuk menyelesaikan masalah tersebut maka Anda bisa menggunakan persamaan linear.

Pada saat Anda bertemu dengan permasalahan dari persamaan dan pertidaksamaan linear dalam kehidupan sehari-hari maka terlebih dahulu Anda harus mengubah bentuk permasalahan tersebut menjadi model matematika. Model matematika merupakan suatu cara yang digunakan untuk menerjemahkan masalah matematika ke dalam bahasa matematika menggunakan persamaan atau pertidaksamaan. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

Pada bab ini akan membahas tentang persamaan linear satu variabel, persamaan linear dua variabel, persamaan kuadrat, pertidaksamaan linear, pertidaksamaan kuadrat, dan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. Menjelaskan persamaan linear satu variabel
2. Menjelaskan persamaan linear dua variabel
3. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan persamaan linear
4. Menjelaskan persamaan kuadrat
5. Menjelaskan pertidaksamaan linear
6. Menjelaskan pertidaksamaan kuadrat
7. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan pertidaksamaan linear

B. Penyajian Materi

1) Persamaan Linear Satu Variabel

Bentuk umum dari persamaan linear dengan satu variabel (peubah) yaitu *ax* + *b* = 0 dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, di mana :

x adalah variabel real

a adalah koefisien dari variabel x

b adalah konstanta

Contoh 6.1

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $10(x+8)-8=6x-12$!
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{2x+6}{5x-3}=4$

Penyelesaian

1. $10(x+8)-8=6x-12 \Leftrightarrow (10x+80)-8=6x-12$
   $\Leftrightarrow 10x+80-8=6x-12$
   $\Leftrightarrow 10x+72=6x-12$
   $\Leftrightarrow 10x-6x=-12-72$
   $\Leftrightarrow 4x=-84$

$\Leftrightarrow x = \frac{-84}{4}$

$\Leftrightarrow x = -21$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x|x = -21\}$

2. $\frac{2x+6}{5x-3} = 4 \Leftrightarrow 2x + 6 = 4\,(5x - 3)$

$\Leftrightarrow 2x + 6 = 4\,(5x - 3)$

$\Leftrightarrow 2x + 6 = 20x - 12$

$\Leftrightarrow 2x - 20x = -12 - 6$

$\Leftrightarrow -18x = -18$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18}{-18}$

$\Leftrightarrow x = 1$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x|x = 1\}$

2) Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear dua variabel merupakan suatu persamaan yang memiliki persamaan dengan bentuk $ax + by + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$dan $a, b \neq 0$, di mana :

x dan y adalah variabel real

a adalah koefisien dari variabel x

b adalah koefisien dari variabel y

c adalah konstanta

Terdapat dua metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan persamaan linear dua variabel, yaitu metode substitusi dan metode eliminasi.

a. Metode Subtitusi

Subtitusi sama artinya dengan mengganti, penyelesaian persoalan dengan metode subtitusi adalah dengan cara menyatakan salah satu variabel dari persamaan pertama dinyatakan dalam variabel yang kedua, kemudian mengganti variabel tersebut ke dalam persamaan kedua, sehingga diperoleh nilai dari satu variabel dan variabel kedua juga dapat dicari dengan mensubtitusikan nilai dari variabel yang pertama.

Contoh 6.2

Perhatikan dua persamaan berikut.

$2x + 3y = 7$

$x + 4y = 16$

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel tersebut dengan menggunakan metode substitusi!

Penyelesaian

Langkah pertama, pilih salah satu persamaan untuk diubah menjadi bentuk persamaan yang lain. Misal persamaan yang akan diubah adalah$x + 4y = 16$ dan diubah menjadi:

$x + 4y = 16 \Leftrightarrow x = 16 - 4y$

Selanjutnya substitusikan persamaan baru tersebut sehingga diperoleh:

$2x + 3y = 7 \Leftrightarrow 2(16 - 4y) + 3y = 7$

$\Leftrightarrow 32 - 8y + 3y = 7$

$\Leftrightarrow 32 - 5y = 7$

$\Leftrightarrow -5y = 7 - 32$

$\Leftrightarrow -5y = -25$

$\Leftrightarrow y = 5$

Substitusikan $y = 5$ ke salah satu persamaan, missal $x + 4y = 16$ sehingga diperoleh:

$x + 4y = 16 \Leftrightarrow x + 4(5) = 16$

$\Leftrightarrow x + 20 = 16$

$\Leftrightarrow x = 16 - 20$

$\Leftrightarrow x = -4$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = {(- 4, 5)}

b. Metode Eliminasi

Metode eliminasi artinya metode menghilangkan. Artinya dalam menyelesaikan persoalan persamaan linear dua variabel dengan metode eliminasi maka akan menghilangkan salah satu variabel dari persamaan tersebut (atau nilai dari variabel tersebut 0) untuk memperoleh nilai dari variabel yang lainnya. Ada dua langkah untuk melakukan metode eliminasi, yaitu:

a. Langkah pertama mengeliminasi *x* sehingga diperoleh nilai dari variabel *y*.
b. Langkah kedua mengeliminasi *y* sehingga diperoleh nilai dari variabel *x*.

Contoh 6.3

Perhatikan dua persamaan berikut.

$4x + 2y = 10$

$2x + 4y = 8$

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut dengan menggunakan metode eliminasi!

Penyelesaian

Langkah pertama yaitu mengeliminasi *x* untuk memperoleh nilai dari variabel *y*

$4x + 2y = 10$ |dikalikan 1|

$2x + 4y = 8$ |dikalikan 2|

Diperoleh

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 10 \\ 4x + 8y = 16 \quad - \\ \hline -6y = -6 \end{array}$$

$y = \frac{-6}{-6}$

$y = 1$

Langkah kedua yaitu mengeliminasi *y* untuk memperoleh nilai dari variabel *x*

$4x + 2y = 10$ |dikalikan 2|

$2x + 4y = 8$ |dikalikan 1|

Diperoleh

$$\begin{array}{r} 8x + 4y = 20 \\ 2x + 4y = 8 \quad - \\ \hline 6x = 12 \end{array}$$

$x = \frac{12}{6}$

$x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = {(2, 1)}

3) Persamaan kuadrat

Bentuk umum dari persamaan kuadrat dalam variabel x adalah $ax^2 + bx + c = 0$ di mana $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Contoh:

(1) $x^2 + 7x + 10 = 0$

(2) $3x^2 + 7x - 6 = 0$

(3) $16x^2 - 4 = 0$

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselesaikan dengan mencari nilai x dari persamaan kuadrat tersebut sehingga persamaan tersebut bisa menjadi kalimat atau pernyataan yang bernilai benar. Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat ada 3 cara yang bisa digunakan, yaitu sebagai berikut.

a. Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara memfaktorkan

Langkah awal yang dilakukan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat adalah dengan mengingat kembali sifat-sifat istimewa operasi bilangan real, yaitu:

1) $a(b + c) = ab + bc$
2) $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$
3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4) $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
5) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

Ingat juga untuk sebarang bilangan real p dan q selalu berlaku jika $p, q \in \mathbb{R}$ dan $pq = 0$ maka $p = 0$ atau $q = 0$.

Contoh 6.4

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut!

1. $4x^2 - 4x - 8 = 0$
2. $x^2 - 4x = 12$

Penyelesaian

1) $4x^2 - 4x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x+2) - 4(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-4)(x+2) = 0$

$2x - 4 = 0$	atau	$x + 2 = 0$
$2x - 4 + 4 = 0 + 4$		$x + 2 - 2 = 0 - 2$
$2x = 4$		$x = -2$
$x = \frac{4}{2}$		
$x = 2$		

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{2, -2\}$ atau $\{-2, 2\}$

2) $x^2 - 4x = 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 12 - 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x(x+2) - 6(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x+2) = 0$

$x - 6 = 0$	atau	$x + 2 = 0$
$x - 6 + 6 = 0 + 6$		$x + 2 - 2 = 0 - 2$
$x = 6$		$x = -2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{6, -2\}$ atau $\{-2, 6\}$

b. Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna

Bentuk persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ di mana $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$ kadang tidak selalu mudah untuk diselesaikan dengan cara difaktorkan. Salah satu cara lain yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut adalah dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna sehingga diperoleh penyelesaian untuk x.

Bentuk $x^2 + 2kx + k^2 = (x + k)^2$ memiliki hubungan antar koefisien x, dengan k^2 yaitu $k^2 = (\frac{1}{2}\ x\ 2k)^2$ sehingga bentuk $x^2 + 2px$ dapat diubah dengan kuadrat sempurna dari $\frac{1}{2}$ koefisien x. Ada beberapa tahapan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna, yaitu sebagai berikut:

1) Koefisien dari x^2 yaitu 1 dan dapat dibuat menjadi 1
2) Persamaan dinyatakan dalam bentuk $x^2 + mx = n$
3) Kedua ruas persamaan ditambah dengan kuadrat dari hasil kali ($\frac{1}{2}$ koefisien x).
4) Pernyataan dinyatakan dalam bentuk $(x + p)^2 = q$

Contoh 6.5

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini dengan melengkapkan kuadrat sempurnanya!

1. $x^2 – 6x = 16$
2. $6x^2 – 5x – 25 = 0$

Penyelesaian

1) $x^2 + 4x = 12$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x\ = 12$ kedua ruas ditambah dengan $\left(\frac{1}{2}\ x\ 4\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 16$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 \quad = 16$

$\Leftrightarrow x + 2 \quad = \pm\sqrt{16}$

$\Leftrightarrow x + 2 \quad = \pm\ 4$

$x + 2 = -4$ atau $x + 2 = 4$

$x + 2 - 2 = -4 - 2$ $\quad x + 2 - 2 = 4 - 2$

$x = -6$ $\quad x = 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{-6, 2\}$

2) $6x^2 - 5x - 25 = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 25 + 25 = 0 + 25$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x = 25$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(6x^2 - 5x) = \frac{1}{6}\ x\ 25$ kedua ruas dikalikan $\frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x = \frac{25}{6}$$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{25}{144} = \frac{25}{6} + \frac{25}{144}$ kedua ruas ditambah $\left(\frac{1}{2}x\left(-\frac{5}{6}\right)\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{625}{144}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5}{12} = \pm\sqrt{\frac{625}{144}}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5}{12} = \pm\frac{25}{12}$$

$x - \frac{5}{12} = \frac{25}{12}$ atau $x - \frac{5}{12} = -\frac{25}{12}$

$x - \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{25}{12} + \frac{5}{12}$ $\quad$ $x - \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = -\frac{25}{12} + \frac{5}{12}$

$x = \frac{30}{12}$ $\quad$ $x = -\frac{20}{12}$

$x = \frac{15}{6}$ $\quad$ $x = -\frac{5}{3}$

$x = 2\frac{1}{2}$ $\quad$ $x = -1\frac{2}{3}$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\left\{-1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{2}\right\}$

c. Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan rumus

$ax^2 + bc + c = 0$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat dilakukan dengan cara menurunkan rumus sebagai berikut.

$ax^2 + bc + c = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ (kedua ruas dikali 4*a*)

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (b^2 - b^2) = 0$
(ruas kiri ditambah $b^2 - b^2$)
$\Leftrightarrow (4a^2x^2 + 4abx + b^2) - (b^2 - 4ac) = 0$
$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = 0$

Sehingga diperoleh rumus:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nilai $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan dari persamaan $ax^2 + bc + c = 0$ dan ditulis dengan D sehingga rumus tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Anggota dari himpunan penyelesaian $\{x_1, x_2\}$ disebut sebagai akar-akar persamaan. Perhatikan hal berikut.

a) Jika D > 0 maka persamaan kuadrat memiliki himpunan penyelesaian bilangan real yang berbeda.
b) Jika D < 0, maka persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian bilangan real.
c) Jika D = 0 maka persamaan kuadrat tersebut memiliki himpunan penyelesaian dua bilangan real dan sama atau akar kembar.

Contoh 6.6

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut dengan menggunakan rumus!

1. $x^2 - 8x + 7 = 0$
2. $2x^2 - 13x = 15$

Penyelesaian

1. $x^2 - 8x + 7 = 0$

   Berdasarkan persamaan tersebut dapat diketahui bahwa $a = 1$, $b = -8$, dan $c = 7$ sehingga diperoleh

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\,(1)(7)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$x_1 = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$ atau $x_2 = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{7, 1\}$

2. $2x^2 - 13x = 15$

   $2x^2 - 13x - 15 = 0$

   Berdasarkan persamaan tersebut dapat diketahui bahwa $a = 2$, $b = -13$, dan $c = -15$ sehingga diperoleh

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\,(2)(-15)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 17}{4}$$

$x_1 = \frac{13+17}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ atau $x_2 = \frac{13-17}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

Jadi, himpunan penyelesainya adalah HP = $\{4\frac{1}{3}, -1\}$

4) Pertidaksamaan

a. Pengertian Pertidaksamaan

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang memuat satu atau lebih peubah dan relasi ”kurang dari” disimbolkan dengan ” < ”, relasi ”lebih dari” disimbolkan dengan ” > ”, relasi ”kurang dari atau sama dengan” disimbolkan dengan ” ≤ ”, atau relasi ”lebih dari atau sama dengan” disimbolkan dengan ” ≥ ”. Pertidaksamaan memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku bahwa jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$
2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ berlaku jika p adalah sebarang bilangan maka:
   - jika $a > b$ maka $\begin{cases} a + p > b + p \\ a - p > b - p \end{cases}$
   - jika $a < b$ maka $\begin{cases} a + p < b + p \\ a - p < b - p \end{cases}$
3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ berlaku jika p adalah sebarang bilangan maka:
   - untuk $p > 0$, Jika $a > b$ maka $\begin{cases} ap > bp \\ \frac{a}{p} > \frac{b}{p} \end{cases}$
   - untuk $p < 0$, Jika $a < b$ maka $\begin{cases} ap < bp \\ \frac{a}{p} < \frac{b}{p} \end{cases}$

b. Pertidaksamaan Linier

Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan dengan peubah x yang disajikan dalam bentuk $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ atau $ax + b < 0$.

Terdapat beberapa langkah yang bisa digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan, linier, yaitu:

1) Semua suku yang memiliki variabel yang sama dikumpulkan pada salah satu ruas dan suku yang lain dikumpulkan pada ruas yang lainnya
2) Mencari pertidaksamaan yang paling sederhana yang ekuivalen dengan pertidaksamaan yang semula

Contoh 6.7

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan dari :

1. $5x + 2 > 3x - 6$

2. $4x + 5 < 8x - 3$

Penyelesaian

1. $5x + 2 > 3x - 6$

$\Leftrightarrow 5x - 3x + 2 - 2 > 3x - 3x - 6 - 2$

$\Leftrightarrow 2x > -8$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{-8}{2}$

$\Leftrightarrow x > -4$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x|x > -4\}$

2. $4x + 5 < 8x - 3$

$\Leftrightarrow 4x - 8x + 5 - 5 < 8x - 8x - 3 - 5$

$\Leftrightarrow -4x < -8$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{-8}{-4}$

$\Leftrightarrow x > 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x|x > 2\}$

c. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat merupakan pertidaksamaan di mana pangkat tertinggi dari variabelnya yaitu dua. Dalam menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat sama caranya dengan menyelesaikan persamaan kuadrat sebelumnya yang sudah dibahas.

Contoh 6.8

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat berikut

1. $x^2 - 2x > 15$
2. $2x^2 - x - 15 \geq 0$

Penyelesaian

1. $x^2 - 2x > 15$

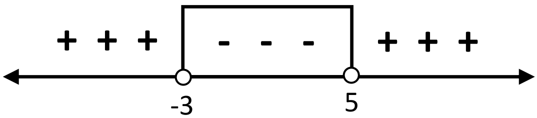
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 > 15 - 15$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 > 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+3) > 0$

$x - 5 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$x = 5$ $x = -3$



Gambar 6.1

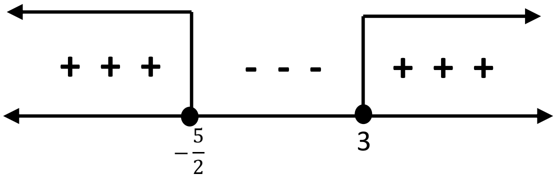
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x|x > -3\}$

2. $2x^2 - x - 15 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2x+5)(x-3) \geq 0$

$2x + 5 = 0$ atau $x - 3 = 0$

$x = -\frac{5}{2}$ $x = 3$



Gambar 6.2

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x|x \leq -\frac{5}{2}$ atau $x \geq 3\}$.

d. Pertidaksamaan Pecahan

Dalam menyelesaikan pertidaksamaan pecahan ada beberapa langkah yang bisa dilakukan, yaitu :

1) Semua variabel diletakkan pada ruas kiri
2) Menyederhanakan persamaan pada ruas kiri
3) Mengubah bentuk $\frac{a}{b}$ menjadi $(a\ x\ b)$

4) Menentukan pembuat nol pada ruas kiri
5) Membuat garis bilangan dan menuliskan nilai pada garis bilangan tersebut
6) Memberikan tanda positif atau negatif pada setiap interval

Contoh 6.9

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{3x-4}{x+2} \leq 1$!

Penyelesaian

$\frac{3x-4}{x+2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2} - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2} - \frac{(x+2)}{(x+2)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-4-x-2}{x+2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+2} \leq 0$

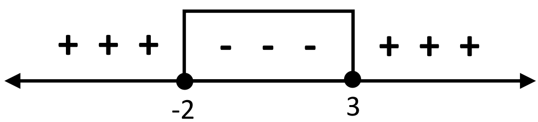
$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+2}(x+2)^2 \leq 0(x+2)^2$

$\Leftrightarrow (2x-6)(x+2) \leq 0$

$2x - 6 = 0$ atau $x + 2 = 0$

$x = \frac{6}{2}$ $\quad$ $x = -2$

$x = 3$



Gambar 6.3

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$

e. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Pengertian nilai mutlak

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ jika } x \geq 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Dalam menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak, ada beberapa sifat yang bisa digunakan, yaitu:

1) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$
3) $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Contoh 6.10

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|3x - 6| < -9$ ¡
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $3|x - 1| < |x + 1|$!

Penyelesaian

1. $|3x - 6| < -9$

   Penyelesaian pertama

   $3x - 6 \quad < -9$
   $3x - 6 + 6 < -9 + 6$
   $3x < -3$
   $x < -\frac{3}{3}$
   $x < -1$

   Penyelesaian kedua

   $3x - 6 \quad > 9$
   $3x - 6 + 6 > 9 + 6$
   $3x > 15$
   $x > \frac{15}{3}$
   $x > 5$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x \,|x < -1 \text{ atau } x > 5\}$
2. $3|x - 1| < |x + 1|$
   $\Leftrightarrow (3(x - 1)^2 < (x + 1)^2$
   $\Leftrightarrow (3x - 3)^2 < (x + 1)^2$
   $\Leftrightarrow (3x - 3)(3x - 3) < (x + 1)(x + 1)$
   $\Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 9 < x^2 + 2x + 1$
   $\Leftrightarrow 9x^2 - x^2 - 18x - 2x + 9 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 20x + 8 < 0$

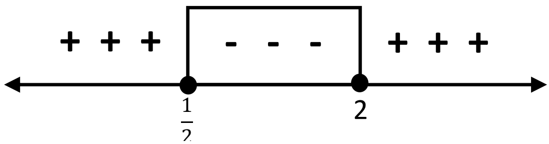
$\Leftrightarrow (4x-2)(2x-4) < 0$

$4x - 2 = 0$ atau $2x - 4 = 0$

$4x = 2$ $\qquad$ $2x = 4$

$x = \frac{2}{4}$ $\qquad$ $x = 2$

$x = \frac{1}{2}$



Gambar 6.4

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$

C. Rangkuman

1. *ax* + *b* = 0 dengan $a, b \in R$ dan *a* ≠ 0 merupakan bentuk umum dari persamaan linear satu variabel
2. Persamaan linear dua variabel merupakan suatu persamaan yang memiliki persamaan dengan bentuk $ax + by + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a, b \neq 0$.
3. Dalam menyelesaikan permasalahan persamaan linear dua variabel terdapat dua metode yang bisa digunakan, yaitu metode substitusi dan eliminasi.
4. Penyelesaian persoalan dengan metode subtitusi adalah dengan cara menyatakan salah satu variabel dari persamaan pertama dinyatakan dalam variabel yang kedua, kemudian mengganti variabel tersebut ke dalam persamaan kedua, sehingga diperoleh nilai dari satu variabel.
5. Dalam menyelesaikan persoalan persamaan linear dua variabel dengan metode eliminasi maka akan menghilangkan salah satu variabel dari persamaan tersebut (atau nilai dari variabel tersebut 0) untuk memperoleh nilai dari variabel yang lainnya.
6. Bentuk umum dari persamaan kuadrat dalam variabel *x* adalah $ax^2 + bx + c = 0$ dengan syarat $a, b, c \in R$ dan a ≠0.

7. Terdapat tiga cara dalam menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu dengan cara memfaktorkan, dengan melengkapkan kuadrat sempurna, dan dengan rumus.
8. Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang memuat satu atau lebih peubah dan relasi ”kurang dari” yang disimbolkan ” < ”, ”lebih dari” disimbolkan ” > ”, kurang dari atau sama dengan yang disimbolkan ” ≤ ”, atau lebih dari atau sama dengan yang disimbolkan ” ≥ ”.
9. Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan dengan peubah *x* yang disajikan dalam bentuk a*x* + b ≥ 0, a*x* + b ≤ 0, a*x* + b > 0,atau a*x* + b < 0.
10. Pertidaksamaan kuadrat merupakan suatu pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi dari variabelnya yaitu dua.
11. Nilai mutlak *x* (atau $|x|$) dapat diartikan sebagai berikut.

    $$|x| = \{ \begin{matrix} x, jika\ x \geq 0 \\ -x, jika\ x < 0 \end{matrix}$$

D. Latihan

1. Perhatikan persamaan berikut:

   $2x + 3y = 13$

   $x - 3y = 11$

   Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut!
2. Bima pergi ke toko buku untuk membeli peralatan sekolah. Jika Bima ingin membeli 4 pena dan 3 penggaris maka ia harus membayar Rp 9.500. Jika Bima ingin membeli 2 pena dan 5 penggaris maka ia harus membayar Rp 10.000. Berapakah uang yang harus dikeluarkan oleh Bima jika ia ingin membeli 3 pena dan 1 penggaris ?
3. Perbandingan dua bilangan x dan y adalah 7 : 3, sedangkan selisihnya adalah 3. Berapakah jumlah bilangan x dan y ?
4. Besar uang Santi adalah 4 kali uang Adit. Selisih uang Santi dan Adit adalah Rp 36.000. Berapakah jumlah uang mereka ?
5. Diketahui suatu persamaan $2x^2 + 7x - 15 = 0$. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan tersebut!

6. Diketahui suatu pertidaksamaan $3x^2 - 9x \leq x^2 - 4$. Tentuan nilai *x* yang memenuhi persamaan tersebut!
7. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\frac{x-2}{x+5} \geq 0$!
8. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{1}{3}$!
9. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\left|\frac{x}{3} - 2\right| = 6$!
10. Tentukan himpunan penyelesaian dari $|2x - 5| > |x + 4|$!

E. Daftar Rujukan

Howard Anton. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Batam: Interaksara.

Hasan Sastra Negara. 2014. *Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Sukirman, dkk. 2017. *Buku Materi Pokok Matematika (Edisi 2)*. Jakarta: Universitas Terbuka.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Dona Dinda Pratiwi. 2019. Pengembangan Bahan Ajar Aljabar Linier Berbasis Nilai-Nilai Keislaman Dengan Pendekatan Saintifik. *Desimal: Jurnal Matematika* 2 (2) 155 – 163.

Netty J. Marlin Gella dan Yusak I Bien. 2020. *Aljabar Linear Dasar Berbasis IT*. Yogyakarta: Deepublish.

BAB VII

FPB DAN KPK

A. Pendahuluan

Sebelum mempelajari materi ini, Anda harus memahami terlebih dahulu materi tentang sistem bilangan bulat. FPB dan KPK merupakan materi yang saling berhubungan dan sering Anda temui dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya pada saat Anda akan membagi secara rata beberapa barang yang ada untuk beberapa orang. Contoh lain misalnya Anda ingin menghitung orbit planet maka Anda memerlukan KPK untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

Pada bab ini akan membahas tentang faktor, kelipatan, bilangan ganjil, bilangan genap, keterbagian, ciri-ciri habis dibagi, bilangan prima, bilangan komposit, FPB, KPK, dan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan FPB dan KPK. Jadi pelajari dengan baik dan dengan cermat materi yang ada pada bab ini dan kerjakan latihan yang ada pada akhir bab untuk memperdalam kemampuan Anda dalam memahami materi ini.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, anda diharapkan dapat:

1. Menjelaskan perbedaan faktor dan kelipatan
2. Menjelaskan perbedaan bilangan ganjil dan bilangan genap
3. Menjelaskan pengertian keterbagian
4. Membedakan bilangan prima dan bilangan komposit
5. Menjelaskan konsep FPB
6. Menjelaskan konsep KPK
7. Menyelesaikan permasalahan matematika yang berkaitan dengan FPB dan KPK

B. Penyajian Materi

1. Faktor dan Kelipatan

Faktor dan kelipatan merupakan salah satu materi yang berhubungan dengan teori bilangan. Faktor merupakan suatu bilangan yang jika dikalikan dengan bilangan lainnya maka akan menghasilkan hasil kali atau kelipatannya. Contohnya 10 yang memiliki faktor yaitu 2 dan 5. Hal ini juga bisa dikatakan bahwa 10 merupakan kelipatan dari 2 dan 5. Untuk setiap bilangan cacah memiliki faktor minimal dua, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Definisi Faktor dan Kelipatan

Jika a dan b merupakan bilangan cacah, maka a adalah faktor dari b jika dan hanya jika terdapat c bilangan cacah sedemikian sehingga ac = b. Jadi dapat dikatakan bahwa a pembagi b, a faktor b, b kelipatan a, atau b habis dibagi a.

Contoh 7.1

Klasifikasikan pernyataan berikut benar atau salah

a. $5|10$
b. 21 kelipatan dari 3
c. 8 adalah pembagi dari 17
d. 10 adalah faktor dari 100
e. 36 adalah kelipatan dari 5

Klasifikasikan apakah pernyataan-pernyataan tersebut bernilai benar atau salah!

Penyelesaian

a. Benar bahwa $5|10$
b. Benar bahwa 21 adalah kelipatan dari 3
c. Salah, 8 bukan pembagi dari 17
d. Benar bahwa 10 adalah faktor dari 100
e. Salah, 36 bukan kelipatan dari 5

2. Bilangan Ganjil dan Bilangan Genap

Berbicara teori bilangan berarti berbicara bilangan ganjil dan bilangan genap. Bilangan ini sangat sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari sehingga Anda harus mengetahui apa saja perbedaan antara bilangan ganjil dan bilangan genap. Suatu bilangan cacah disebut juga bilangan genap jika memiliki ciri sebagai berikut.

1. Bilangan tersebut memiliki bilangan 2 sebagai faktornya
2. Bilangan tersebut habis dibagi 2
3. Jika $a = 2x$ di mana x adalah bilangan cacah maka a pasti bilangan genap
4. Penjumlahan dari dua bilangan genap selalu genap
5. Perkalian dari dua bilangan genap juga selalu genap
6. Bilangan tersebut dapat direpresentasikan sebagai penjumlahan dua bilangan cacah
7. Bilangan tersebut memiliki digit satuan 2, 4, 6, 8, 0

Jika suatu bilangan cacah tidak memenuhi ciri dari bilangan genap maka bilangan cacah tersebut termasuk dalam bilangan ganjil. Untuk perkalian yang melibatkan bilangan ganjil dan bilangan genap dapat dituliskan dalam tabel perkalian berikut ini.

Tabel 7.1

X	Genap	Ganjil
Genap	Genap	Genap
Ganjil	Genap	Ganjil

Contoh 7.2

1. Mengapa 1.234.567 merupakan bilangan ganjil, berikan alasannya!

   Penyelesaian

   Bilangan 1.234.567 memiliki digit terakhir yaitu 7 dan 7 termasuk bilangan ganjil. Bilangan 7 merupakan bentuk eksplisit dari $2k + 1$.
2. Apakah 3^{99} memiliki hasil bilangan ganjil? Berikan alasannya!

Penyelesaian

3^{99} memiliki hasil bilangan ganjil. Hal ini dikarenakan jika bilangan ganjil dipangkatkan dengan pangkat berapapun maka hasilnya pasti juga ganjil.

3. Keterbagian

Definisi

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a \neq 0$ maka a disebut membagi b dan dituliskan $a|b$ jika $b = ka$ di mana $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Notasi $a|b$ dapat dibaca "a membagi b" atau "b habis dibagi a" atau "a pembagi b" atau "a pembagi b" atau "a faktor dari b" atau "b kelipatan dari a".

Jika a tidak membagi b maka dapat dituliskan $a \nmid b$.

Contoh 7.3

Perhatikan pernyataan berikut.

a. $2|16$
b. $6|30$
c. $4|9$

Berdasarkan pernyataan tersebut, tentukan manakah yang memenuhi *a*$|b$!

Penyelesaian

a. $2|16$, karena"2 membagi 16" atau "16 habis dibagi oleh 2", dengan hasil yaitu 8. Hal ini mengakibatkan $16 = 8\ x\ 2$ dan $8 \in \mathbb{Z}$.
b. $6|30$ karena benar bahwa "6 membagi 30" atau "30 habis dibagi oleh 6", dengan hasil yaitu 5. Hal ini mengakibatkan $30 = 5\ x\ 6$ dan $5 \in \mathbb{Z}$.
c. $4 \nmid 9$ karena "4 tidak membagi 9" atau "9 tidak habis dibagi oleh 4" sehingga tidak ada $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi pernyataan tersebut.

Ada beberapa teorema yang bisa digunakan dalam pembuktian keterbagian. Teorema tersebut adalah sebagai berikut.

Teorema 7.1

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku :

1. Jika $a|b$ maka $a|bc$ di mana $a \neq 0$
2. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$ di mana $a \neq 0$ dan $b \neq 0$
3. Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|b \pm c$ di mana $a \neq 0$
4. Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|(bx \pm cy)$ di mana $a \neq 0$, $(\forall\ x, y\ \in \mathbb{Z})$

5. Jika $a|b$ dan $b|a$ maka $a = \pm\, b$ di mana $a \neq 0$ dan $b \neq 0$
6. Jika $a|b$ dan $a > 0, b > 0$ maka $a \leq b$ di mana $a \neq 0$
7. $\forall k \in \mathbb{Z}$ dan $k \neq 0$ sehingga$a|b$ jika dan hanya jika $ka|kb$ di mana $a \neq 0$.

Contoh pengaplikasian teorema tersebut antara lain sebagai berikut.

1. Teorema no 1
   Jika $3|9$ maka $3|9\ x\ 2$ atau $3|9\ x\ 3$ atau $3|9\ x\ 4$dst
2. Teorema no 2
   Jika $2|4$ dan $4|8$ maka $2|8$
3. Teorema no 3
   Jika $4|24$ dan $4|16$ maka $4|24 + 16$ atau $4|40$
   Begitu pula untuk pengurangan berlaku:
   Jika $4|24$ dan $4|16$ maka $4|24 - 16$ atau $4|8$
4. Teorema no 4
   $5|10$ maka $5|10\ x\ 2$
   $5|20$ maka $5|20\ x\ 3$
   Sehingga: Jika $5|10$ dan $5|20$ maka $5|((10\ x\ 2) + (20\ x\ 3))$ atau $5|80$
   Begitu pula untuk pengurangan berlaku
   Jika $5|10$ dan $5|20$ maka $5|((10\ x\ 2) - (20\ x\ 3))$ atau $5| - 40$
5. Teorema no 7
   $14|42$ atau $(2\ x\ 7)|(2\ x\ 21)$
   Jadi $7|21$ jika dan hanya jika $(2\ x\ 7)|(2\ x\ 21)$

Berdasarkan beberapa contoh keterbagian yang telah dipaparkan sebelumnya, bisa diketahui apakah suatu bilangan bulat akan habis dibagi dengan bilangan bulat yang lainnya atau tidak. Bilangan bulat yang digunakan tersebut hanya menggunakan 1 digit atau 2 digit saja, sehingga tidak dibutuhkan alat bantu hitung lainnya untuk membuktikannya (seperti kalkulator). Permasalahannya saat ini, bagaimana jika digit yang akan dihitung lebih dari 2, misalnya apakah $2|28569302$? Apakah harus menggunakan alat bantu hitung seperti kalkulator untuk mengetahui apakah benar $2|28569302$? Jawabannya tidak. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, kita hanya perlu mengetahui apa saja ciri-ciri dari suatu bilangan bulat yang habis dibagi oleh suatu bilangan bulat lainnya. Berikut ini akan dijelaskan ciri-ciri bilangan bulat yang habis dibagi oleh 2 sampai 9.

a. Habis Dibagi 2

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$ akan habis dibagi 2 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu digit terakhir (satuannya) habis dibagi oleh 2. Berdasarkan ciri tersebut maka dapat diketahui bahwa suatu bilangan bulat akan habis dibagi oleh 2 jika digit terakhir dari bilangan tersebut merupakan bilangan genap. Bilangan bulat habis dibagi 2 disimbolkan dengan $2|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.4

Tentukan apakah $2|3879278$!

Penyelesaian

Benar bahwa $2|3879278$. Hal ini dikarenakan bilangan 3879278 memiliki digit terakhir yaitu 8 dan 8 habis dibagi oleh 2.

b. Habis Dibagi 3

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$ akan habis dibagi 3 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu jika setiap digit dari bilangan bulat tersebut dijumlahkan maka akan habis dibagi oleh 3. Bilangan bulat habis dibagi 3 disimbolkan dengan $3|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.5

Tentukan apakah $3|2879763$!

Penyelesaian

Benar bahwa $3|2879763$. Hal ini dikarenakan jika bilangan 2879763 setiap digitnya dijumlahkan maka bilangan tersebut akan habis dibagi 3, yaitu $2 + 8 + 7 + 9 + 7 + 6 + 3 = 42$ habis dibagi 3.

c. Habis Dibagi 4

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$akan habis dibagi 4 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu dua digit terakhir habis dibagi oleh 4. Bilangan bulat habis dibagi 4 disimbolkan dengan $4|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.6

Tentukan apakah $4|9672132$!

Penyelesaian

Benar bahwa $4|9672132$. Hal ini dikarenakan bilangan 9672132 memiliki dua digit terakhir yang habis dibagi oleh 4, yaitu 32 habis dibagi 4.

d. Habis Dibagi 5

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$ akan habis dibagi 5 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu digit terakhir (satuannya) adalah 0 dan 5. Bilangan bulat habis dibagi 5 disimbolkan dengan $5|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.7

Tentukan apakah $5|6982070$!

Penyelesaian

Benar bahwa $5|6982070$. Hal ini dikarenakan bilangan 6982070 memiliki digit terakhir 0.

e. Habis Dibagi 6

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$akan habis dibagi 6 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu bilangan bulat tersebut habis dibagi oleh 2 dan 3. Untuk bilangan bulat yang habis dibagi 2 dan 3 sudah dijelaskan pada poin (1) dan (2). Bilangan bulat habis dibagi 2 disimbolkan dengan $6|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.8

Tentukan apakah $6|5984604$!

Penyelesaian

Benar bahwa $6|5984604$. Hal ini dikarenakan bilangan 5984604 habis dibagi oleh 2 dan 3.

- $2|5984604$ karena bilangan tersebut memiliki digit terakhir yaitu 4 dan 4 habis dibagi oleh 2
- $3|5984604$ karena bilangan tersebut jika dijumlahkan setiap digitnya habis dibagi oleh 3, yaitu $5+9+8+4+6+0+4=36$ dan 36 habis dibagi oleh 3.

f. Habis Dibagi 7

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$ akan habis dibagi 7 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu jika digit terakhir (satuannya) dikalikan dengan 2 dan hasilnya menjadi pengurang dari digit sisanya. Jika hasil dari pengurangnya habis dibagi 7 maka bilangan tersebut habis dibagi 7.

Contoh 7.9

Tentukan apakah $7|2105299$!

Penyelesaian

Benar bahwa $7|2105299$. Hal ini dikarenakan bilangan 2105299 jika digit terakhirnya dikali 2 dan hasilnya menjadi pengurang dari digit sisanya maka bilangan tersebut habis dibagi 7, yaitu $210530 - (9\ x\ 2) = 210529 - 18 = 210511$ dan 210511 habis dibagi 7.

g. Habis Dibagi 8

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$akan habis dibagi 8 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu tiga digit terakhir habis dibagi oleh 8. Bilangan bulat habis dibagi 8 disimbolkan dengan $8|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.10

Tentukan apakah $8|3892616$!

Penyelesaian

Benar bahwa $8|3892616$. Hal ini dikarenakan bilangan 3892616 memiliki tiga digit terakhir yang habis dibagi 8, yaitu 616 habis dibagi oleh 8.

h. Habis Dibagi 9

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$ akan habis dibagi 9 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu jika setiap digit dari bilangan bulat tersebut dijumlahkan maka akan habis dibagi oleh 9. Ciri ini sama dengan ciri habis dibagi 3. Bilangan bulat habis dibagi 9 disimbolkan dengan $9|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.11

Tentukan apakah $9|1761021$!

Penyelesaian

Benar bahwa $9|1761021$. Hal ini dikarenakan jika bilangan 1761021 setiap digitnya dijumlahkan maka bilangan tersebut akan habis dibagi 9, yaitu $1 + 7 + 6 + 1 + 0 + 2 + 1 = 18$ habis dibagi 9.

i. Habis Dibagi 10

Suatu bilangan bulat $\mathbb{Z}$ akan habis dibagi 10 jika bilangan tersebut memiliki ciri yaitu digit terakhir (satuannya) adalah 0. Bilangan bulat habis dibagi 10 disimbolkan dengan $10|\mathbb{Z}$.

Contoh 7.12

Tentukan apakah $10|5287290$

Penyelesaian

Benar bahwa $10|5287290$. Hal ini dikarenakan bilangan 5287290 memiliki digit terakhir yaitu 0.

4. **Bilangan Prima dan Bilangan Komposit**

Bilangan prima dapat didefinisikan sebagai berikut.

"Bilangan prima adalah bilangan asli yang tepat memiliki dua pembagi"

Berdasarkan definisi tersebut maka dapat dikatakan bahwa bilangan asli dikatakan bilangan prima jika bilangan tersebut hanya dapat dibagi oleh 1 dan bilangan itu sendiri. Contoh bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …

Sedangkan bilangan komposit adalah bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua pembagi. Contoh bilangan komposit adalah 4, 6, 8, 10, 12, 14, …

Bilangan prima dan bilangan komposit tersebut harus lebih dari 1 $(\text{bilangan prima} > 1$ dan $\text{bilangan komposit } > 1)$.

Analogi dilakukan dengan kedekatan manusia kepada Yang Maha Esa. Manusia prima adalah manusia yang selalu dekat dengan Yang Maha Satu, Yang Maha Esa, yaitu Allah SWT. Sebenarnya umat Islam sudah dikenalkan dengan bilangan-bilangan prima, seperti 5 shalat wajib, jumlah rakaat dalam shalat wajib yaitu 17 rakaat, 11 rakaat untuk tarawih dan witr atau 23 rakaat tarawih dan witr, 31 kali ayat "*fa biayyi alai Robbikuma tukadzdziban*".

5. **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)**

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan cacah atau lebih yang bukan nol merupakan bilangan cacah terbesar sebagai faktor dari kedua bilangan tersebut atau lebih. FPB dari a dan b disimbolkan FPB (a,b). Untuk menentukan FPB ada beberapa metode yang bisa digunakan, yaitu dengan irisan himpunan, faktorisasi prima, algoritme pengurangan, dan algoritma Euclid.

a. Irisan Himpunan

Langkah dalam metode ini adalah:

i. Mendaftar semua faktor secara berurutan dari setiap bilangan
ii. Mencari faktor terbesar yang sama dari semua bilangan tersebut

Contoh 7.13

Tentukan FPB dari 24 dan 42!

Penyelesaian

4 memiliki faktor 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
2 memiliki faktor 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
Sehingga faktor persekutuan dari 24 dan 42 adalah 1, 2, 3, 6 dengan bilangan terbesarnya yaitu 6.
Jadi FPB (24, 42) = 6.

b. Faktorisasi Prima

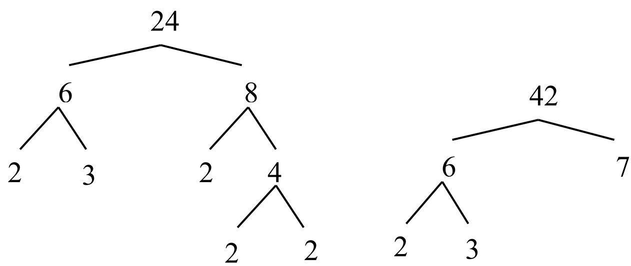
Metode ini dilakukan dengan cara menuliskan bilangan yang ada ke dalam bentuk perkalian bilangan prima. Hasil dari perkaliannya yang merupakan faktor persekutuan dari bilangan tersebutlah yang disebut sebagai FPB.

Contoh 7.13

Tentukan FPB dari 24 dan 42!

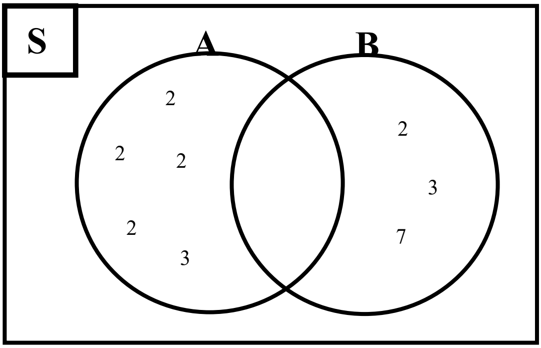
Penyelesaian

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, terlebih dahulu mencari faktorisasi prima dari 24 dan 42 dengan menggunakan pohon faktor dan diagram venn sebagai berikut.
Dengan Pohon faktor



Gambar 7.1

Dengan Diagram Venn



Gambar 7.2

Berdasarkan pohon faktor dan diagram venn tersebut dapat ditunjukkan bahwa

$24 = 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 3$

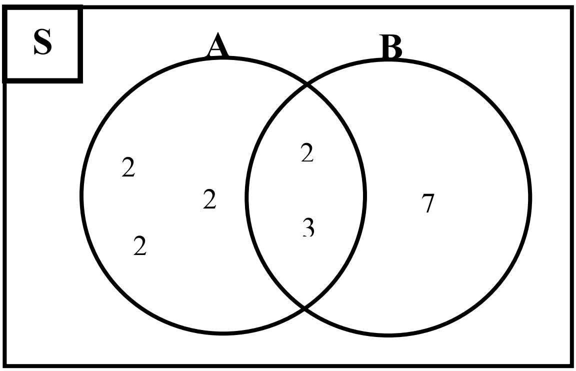
$42 = \ 2\ x\ 3\ x\ 7$

Perkalian faktor prima tersebut dapat dituliskan dalam bentuk pangkat sebagai berikut.

$24 = 2^4\ x\ 3 = 2^3\ x\ 2\ x\ 3\ x\ 7$

$42 = \ 2\ x\ 3\ x\ 7$

Jadi dapat disimpulkan bahwa faktor persekutuan terbesar dari 24 dan 42 adalah $2\ x\ 3 = 6$. Hal ini dapat digambarkan dalam bentuk diagram venn sebagai berikut. Pada diagram tersebut dapat diketahui bahwa irisan dari ke dua himpunan tersebutlah yang merupakan FPB nya.



Gambar 7.3

c. Algoritme Pengurangan

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa keterbagian memiliki teorema salah satunya adalah sebagai berikut.

Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|b \pm c$ di mana $a \neq 0$

Berdasarkan teorema tersebut maka dapat juga dikatakan bahwa :

Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|b - c$ di mana $a \neq 0$

Berangkat dari teorema tersebut maka dapat dikatakan jika *x* adalah faktor persekutuan dari *b* dan *c* di mana $b \geq c$ maka *x* merupakan faktor persekutuan dari $b - c$ dan b. Hal ini mengakibatkan pasangan (b, c) dan (b – c, b) memiliki faktor persekutuan yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa FPB (b, c) = FPB (b – c, b) atau bisa juga dikatakan bahwa FPB (a, b) = FPB (a – b, b).

Teorema 7.2

Jika a dan b adalah sembarang bilangan cacah di mana a ≥ b, maka FPB (a, b) = FPB (a – b, b)

Contoh 7.14

Tentukanlah FPB dari setiap pasangan bilangan berikut!

a. 18 dan 9
b. 392 dan 280
c. 1004 dan 320

Penyelesaian

a. FPB (18, 9)
   = FPB (18-9, 9)
   = FPB (9, 9)
   = 9
   Jadi FPB (19, 8) = 9
b. FPB (392, 280) = FPB (392 – 280, 280)
   = FPB (112, 280)
   = FPB (112, 280-112)
   = FPB (112, 168)
   = FPB (112, 56)
   = FPB (56, 56)
   = 56
   Jadi, FPB (392, 280) = 56

c. FPB (1004, 320)
= FPB (1004 – 320, 320)
= FPB (684, 320)
= FPB (684 – 320, 320)
= FPB (364, 320)
= FPB (364 – 320, 320)
= FPB (44, 320)
= FPB (44, 276)
= FPB (44, 232)
= FPB (44, 188)
= FPB (44, 144)
= FPB (44, 100)
= FPB (44, 56)
= FPB (44, 12)
= FPB (32, 12)
= FPB (20, 12)
= FPB (8, 12)
= FPB (8, 4)
= FPB (4, 4)
= 4
Jadi, FPB (1004, 320) = 4

d. Algoritma Euclid

Misalkan diketahui dua bilangan bulat, yaitu *a* dan *b* di mana $a, b > 0$. Berdasarkan algoritme pembagian diperoleh urutan persamaan sebagai berikut.

$b = a.q_1 + r_1$ dengan $0 \leq r_1 < c$
$a = r_1 q_2 + r_2$ dengan $0 \leq r_2 < r_1$
$r_1 = r_2 q_3 + r_3$ dengan $0 \leq r_3 < r_2$
$r_j - 2 = r_j - 2q_j + r_j$ dengan $0 \leq r_j < r_{j-1}$
$r_j - 1 = r_j q_j + 1$ dst.

Misalkan pembagi persekutuan terbesar dari *a* dan *b* adalah r_j = (a, b) yang merupakan sisa terakhir yang tidak nol dalam proses rekursif pembagian ini. Nilai *x* dan *y* yang bulat pada persamaan $(a, b) = ax + by$ dapat diperoleh dengan eliminasi $r_{j-1}, \dots, r_2, r_1$ dari sistem persamaan di atas.

Contoh 7.15

Tentukanlah FPB dari contoh soal 7.14 (c) dengan menggunakan teorema Euclid!

Penyelesaian

FPB (1004, 320)

1004	= (3 x 320) + 44	(1004, 320)
320	= (7 x 44) + 12	(320, 44)
44	= (3 x 12) + 8	(44, 12)
12	= (1 x 8) + 4	(12, 8)
8	= (2 x 4) + 0	(8, 4)

Jadi, FPB (1004, 320) = 4

6. KPK

Bilangan cacah positif m merupakan kelipatan persekutuan terkecil (disingkat KPK) dua bilangan cacah positif p dan q jika dan hanya jika m adalah bilangan cacah positif terkecil yang dapat dibagi oleh p dan q. Notasi KPK dari p dan q disimbolkan KPK (p, q). Berdasarkan penjelasan tersebut maka dapat dikatakan bahwa KPK dari dua bilangan cacah adalah bilangan cacah positif yang habis dibagi oleh kedua bilangan tersebut. Dalam menentukan KPK ada tiga cara yang bisa digunakan, yaitu irisan himpunan, faktorisasi prima, dan menggunakan rumus.

a. Irisan Himpunan

Metode ini dilakukan dengan cara mendaftar semua kelipatan dari masing-masing bilangan dan menemukan kelipatan pertama yang sama dari kedua bilangan tersebut. Misalkan mencari KPK dari 8 dan 12.

Kelipatan dari 8 adalah 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, …

Kelipatan dari 12 adalah 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, …

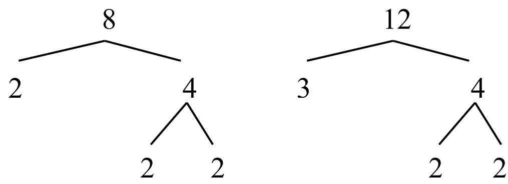
Berdasarkan penjabaran tersebut dapat ditemukan kelipatan pertama yang sama dari 8 dan 12 adalah 24.

Jadi dapat disimpulkan KPK (8, 12) = 24

b. Faktorisasi Prima

Metode ini dilakukan dengan cara menuliskan bilangan yang ada ke dalam bentuk perkalian bilangan prima. Selanjutnya untuk menentukan KPK-nya yaitu dengan melakukan perkalian pada bilangan persekutuan dengan pangkat terbesar dan bilangan yang berdiri sendiri (jika ada).

Misalkan mencari KPK dari 8 dan 12 (seperti contoh pada irisan himpunan).



Gambar 7.4

Berdasarkan pohon faktor tersebut dapat dituliskan dalam bentuk perkalian sebagai berikut.

$8 = 2^3 = 2^3 \; x \; 3^0$

$12 = 2^2 \; x \; 3 = 2^2 \; x \; 3^1$

Kelipatan persekutuan dari 2^3 dan 2^2 adalah 2^3

Kelipatan persekutuan dari 3^0 dan 3^1 adalah $3^1 = 3$

Jadi KPK (8, 12) = $2^3 \; x \; 3 = 8 \; x \; 3 = 24$

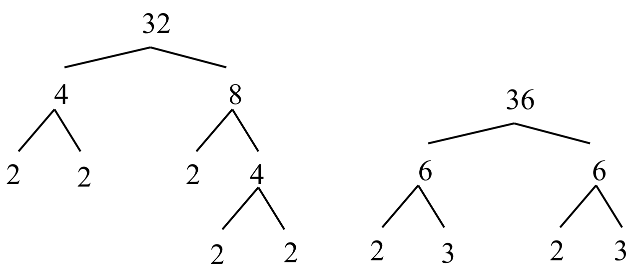
c. Menggunakan Rumus

Menentukan FPB dengan menggunakan rumus yaitu sebagai berikut.

Jika a dan b adalah sembarang bilangan cacah, maka:

KPK (a,b) = $\frac{axb}{FPB(a,b)}$ atau KPK (a,b) x FPB (a,b) = a x b

Misalkan akan dicari KPK dari bilangan 30 dan 42



Gambar 7.5

$32 = 2^5$
$36 = 2^2 \ x \ 3^2$
KPK (32, 36) = $\frac{32 \ x \ 36}{FPB(32,36)} = \frac{2^5 \ x \ (2^2 \ x \ 3^2)}{2^2} = 2^5 \ x \ 3^2 = 288$

Jadi KPK (32, 36) = 288

C. Rangkuman

1. Faktor merupakan suatu bilangan yang jika dikalikan dengan bilangan lainnya maka akan menghasilkan hasil kalinya atau kelipatannya.
2. Jika diketahui dua bilangan cacah a dan b, maka a disebut faktor dari b jika dan hanya jika terdapat c bilangan cacah sedemikian sehingga ac = b.
3. Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a \neq 0$ maka a disebut membagi b dan dituliskan $a|b$ jika $b = ka$ di mana $\forall k \in \mathbb{Z}$.
4. Bilangan prima merupakan bilangan asli yang memiliki pembagi tepat dua.
5. Bilangan komposit merupakan bilangan asli yang mempunyai pembagi lebih dari dua.
6. Faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua bilangan bulat posistif p dan q adalah bilangan bulat positif terbesar r sedemikian hingga r dapat membagi habis p dan q.
7. Metode algoritma Euclides dapat digunakan untuk menentukan FPB dari bilangan-bilangan yang besar, di mana bilangan positif a dan b selalu dapat ditulis menjadi: a = bq + r dengan q bulat positif, r bilangan cacah, dan 0 < r < b.
8. Bilangan asli c disebut kelipatan dari bilangan asli a, jika a membagi habis c.
9. Bilangan bulat positif m adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dua bilangan positif p dan q jika dan hanya jika m merupakan bilangan bulat positif terkecil yang dapat dibagi oleh p dan q.
10. KPK dari 3 bilangan bulat positif atau lebih dapat diselesaikan dengan terlebih dahulu mencari KPK dari bilangan-bilangan tersebut. Misalnya akan dicari KPK dari p, q, r, s maka perlu dicari terlebih dahulu KPK dari bilangan p dan q serta KPK dari bilangan r dan s. Bila KPK (p,q) = m_1 dan KPK (r,s) = m_2 maka KPK (p,q,r,s) = KPK (m_1, m_2).

D. Latihan

1. Perhatikan bilangan bulat positif berikut ini.
   a. 124578
   b. 376596
   c. 434655
   d. 673594

   Periksalah apakah bilangan-bilangan tersebut memenuhi sifat untuk bilangan habis dibagi 2, 3, 4, dan 5! Berikan alasannya!
2. Carilah faktor persekutuan dari bilangan-bilangan berikut!
   a. 124 dan 236
   b. 15, 25, dan 65
3. Carilah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari bilangan-bilangan berikut!
   a. 45 dan 75
   b. 12, 15, dan 36
4. Gunakan Algoritma Euclides untuk menemukan FPB dari bilangan-bilangan berikut!
   a. 63960 dan 41808
   b. 78862 dan 127624
5. Tentukan FPB dan KPK dari bilangan-bilangan berikut!
   a. 45 dan 75
   b. 16, 24, dan 42
6. Di suatu perumahan terdapat 3 orang satpam yang mendapat giliran jaga pada malam hari. Satpam pertama mendapat giliran setiap 2 hari sekali. Satpam kedua setiap 5 hari sekali, sedangkan satpam ketiga setiap 6 hari sekali. Jika tanggal 1 Desember 2008, untuk pertama kali semua bertugas bersama-sama maka pada tanggal berapakah ke-3 satpam tersebut akan bertugas bersama-sama untuk kedua kalinya!

E. Daftar Rujukan

Abdussakir. 2017. "Internalisasi Nilai-nilai Islami Dalam Pembelajaran Matematika dengan Strategi Analogi". *Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami (SI MaNIS)*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Nihayati, Ari Suningsih, dan Hafidz Mufti Abdullah. 2019. “Integrasi Ayat-ayat Bilangan Dalam Al-Qur-an Dengan Nilai-Nilai Islam”. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika* 2 (1) : 101 – 109.

Wahyu Engky Irawan, Nurul Hijriyah, dan Azwar Riza Habibi. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki Press.

F. Bacaan yang Dianjurkan

Marks, John L., dkk. 1988. *Metode Pengajaran Matematika Untuk Sekolah Dasar*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2017. “Internalisasi Nilai-nilai Islami Dalam Pembelajaran Matematika dengan Strategi Analogi”. *Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami (SI MaNIS)*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Dona Dinda Pratiwi. 2019. Pengembangan Bahan Ajar Aljabar Linier Berbasis Nilai-Nilai Keislaman Dengan Pendekatan Saintifik. *Desimal: Jurnal Matematika* 2 (2) 155 – 163.

Gatot Muhsetyo. 2019. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Hasan Sastra Negara. 2014. *Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja (AURA).

Howard Anton. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Batam: Interaksara.

Jong Jek Siang. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta : Andi.

Jong Jek Siang. 2015. *Logika Matematika (Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi)*. Yogyakarta : Andi.

Marks, John L., dkk. 1988. *Metode Pengajaran Matematika Untuk Sekolah Dasar*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Muhammad Rusli, I Ketut Putu Suniantara dan Anggun Nugroho. 2019. *Logika dan Matematika*. Yogyakarta: Andi.

Muser, G.L. & Burger, W.F. 1994. *Mathematics for Elementary Teachers; A Contemporary Approach, Third Edition*. New York: MacMillan Publishing Company, Inc.

Netty J. Marlin Gella dan Yusak I Bien. 2020. *Aljabar Linear Dasar Berbasis IT*. Yogyakarta: Deepublish.

Nihayati. 2017. “Integrasi Nilai-Nilai Islam Dengan Materi Himpunan (Kajian Terhadap Ayat-ayat Al-Qur’an”. *Jurnal Edumath* 3 (1) : 65-77.

Nihayati, Ari Suningsih, dan Hafidz Mufti Abdullah. 2019. “Integrasi Ayat-ayat Bilangan Dalam Al-Qur-an Dengan Nilai-Nilai Islam”.

Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2 (1) : 101 – 109.

Rinaldi Munir. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Sukirman, dkk. 2017. *Buku Materi Pokok Matematika (Edisi 2)*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Wahyu Engky Irawan, Nurul Hijriyah, dan Azwar Riza Habibi. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki Press.

Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S. 2004. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

GLOSARIUM

Anggota himpunan	:	Suatu objek dalam suatu himpunan
Bilangan bulat	:	Bilangan yang terdiri dari bilangan asli (bilangan bulat positif), bilangan nol, dan lawan bilangan asli (bilangan bulat negatif)
Bilangan ganjil	:	Bilangan yang tidak habis jika dibagi dengan bilangan 2
Bilangan genap	:	Bilangan yang tepat habis jika dibagi dengan bilangan 2
Bilangan real	:	Suatu bilangan yang terdiri dari dua jenis bilangan, yaitu bilangan rasional dan irrasional
Bilangan komposit	:	Bilangan yang memiliki faktor lebih dari dua
Daerah asal	:	Himpunan semua nilai x (bilangan pertama dalam setiap pasangan berurutan) dalam suatu relasi
Daerah hasil	:	Himpunan semua nilai y (bilangan kedua dalam setiap pasangan berurutan) pada suatu relasi
Daerah kawan	:	Himpunan semua nilai y (bilangan kedua dalam setiap pasangan berurutan) pada suatu relasi
Determinan	:	Pembeda persamaan kuadrat dengan rumus $D = b^2 - 4ac$
Diagram venn	:	Cara menyatakan himpunan dengan gambar di mana himpunan semesta dinyatakan dengan daerah persegi panjang, sedangkan himpunan lainnya dinyatakan dengan lingkaran atau kurva mulus tertutup sederhana

		dengan noktah (titik) untuk menyatakannya
Domain	:	Daerah asal
Ekuivalen	:	Sama
Eliminasi	:	Penghilangan
Faktor	:	Suatu bilangan yang membagi bilangan lain dengan tepat, disebut juga dengan pembagi
Faktorisasi prima	:	Penulisan bilangan komposit sebagai hasil kali faktor-faktor primanya
FPB	:	Faktor Persekutuan Terbesar
Fungsi	:	Relasi dua himpunan A dan B yang memasangkan setiap anggota pada himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B
Gabungan	:	Semua anggota dari himpunan-himpunan yang dibicarakan
Garis bilangan	:	Garis untuk meletakkan bilangan
Himpunan	:	Kumpulan obyek yang dapat didefinisikan dengan jelas
Himpunan bagian	:	Himpunan A merupakan himpunan bagian himpunan B jika setiap anggota A juga merupakan anggota B
Himpunan kosong	:	Himpunan yang tidak memiliki anggota
Himpunan penyelesaian	:	Himpunan semua penyelesaian dari suatu persamaan, sistem persamaan, dan pertidaksamaan
Himpunan semesta	:	Himpunan yang memuat seluruh himpunan yang dibicarakan
Implikasi	:	Pernyataan bersyarat
Invers	:	Kebalikan atau pengingkaran dari suatu operasi tertentu
Irisan	:	Persekutuan dari himpunan-himpunan yang dibicarakan

Kalimat terbuka	:	Kalimat yang belum diketahui nilai kebenarannya
Kelipatan	:	Kelipatan dari suatu bilangan adalah hasil kali bilangan tersebut dengan bilangan lain
Kodomain	:	Daerah kawan
Komplemen	:	Himpunan anggota-anggota yang ada di dalam semesta yang bukan anggota himpunan yang dimaksud
Konstanta	:	Sebuah bilangan yang tidak memuat variabel
Korespondensi satu-satu	:	Relasi yang memasangkan setiap domain dengan tepat satu kodomain dan tidak ada domain yang tidak mendapatkan pasangan
KPK	:	Kelipatan Persekutuan Terkecil
Operasi hitung	:	Perhitungan yang melibatkan tanda operasi hitung, misalnya penjumlahan, pengurangan, pembagian, dan perkalian
Pecahan	:	Perbandingan yang menyatakan suatu bagian dari keseluruhan bagian
Pernyataan	:	Kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya
Persamaan	:	Kalimat terbuka yang memuat tanda-tanda “sama dengan”
Persamaan Kuadrat	:	Persamaan di mana pangkat tertinggi dari variabel (peubah) adalah dua
Persamaan Linear	:	Suatu persamaan disebut persamaan linear apabila grafik semua penyelesaiannya terletak pada sebuah garis
Pertidaksamaan	:	Kalimat terbuka yang memuat tanda “ $<$, $\leq$, $>$, $\geq$
Range	:	Hasil

Relasi	:	Memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain
Selisih himpunan	:	Himpunan yang anggotanya semua anggota A tetapi bukan anggota B
Sifat asosiatif	:	Suatu cara untuk mengelompokkan tiga bilangan untuk dijumlahkan atau dikalikan dan tidak mengubah jumlah atau hasil kalinya
Sifat distributif	:	Suatu cara untuk mengalikan suatu jumlah dengan suatu bilangan, kalikan masing-masing bilangan yang dijumlahkan dengan bilangan di luar kurung
Sifat komutatif	:	Suatu cara untuk mengurutkan dua bilangan yang dijumlahkan atau dikalikan tetapi tidak mengubah jumlah atau produknya
Substitusi	:	Mengganti atau menyatakan salah satu variabel dengan variabel lainnya.
Variabel	:	Huruf atau simbol lain yang digunakan untuk mewakili bilangan atau nilai yang tidak ditentukan

INDEX

H

I

K

O

P

R

S

V